EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR LIWENAGEL

28e JAARGANG 1952/53

I

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van L i w e n a g e l (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van W i m e c o s (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van de Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van *f* 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Chr. H.B.S., Jachtlaan 108, Apeldoorn, tel. K6760—2581 (alleen tussen 8.— en 4.15 uur). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

MEDEDELING:

Het „Nederlands Cultureel Contact" houdt dit jaar een onderwijscongres te Woudschoten (bij Zeist) van Vrijdag 10 October 16 uur tot Zaterdag 11 October ± 17 uur.
Onderwerp: „Het onderwijsplan Rutten."
Inlichtingen en deelnemersformulieren Nachtegaalplein 4, 's-Gravenhage.

DE WISKUNDE VOOR DE NIET-MATHEMATISCHE RICHTINGEN.[1]

door

P. J. VAN ALBADA.

Het vorig jaar hebben we ons in de wiskunde-werkgroep van de W.V.O. bezig gehouden met het leerplan van H.B.S.-b en Gymnasium-b. De gebruikelijke leerstof is van het begin van de eerste klas af nu eens in commissies, dan weer in groter verband uitvoerig doorgenomen, en critisch bekeken. Nu dit werk een heel eind heen is gevorderd, wordt als volgend onderwerp de wiskunde voor niet mathematische richtingen aangesneden, waarbij dan voornamelijk gedacht is aan H.B.S.-a en Gymnasium-a.

Deze gang van zaken is min of meer symbolisch voor de waardering, die wij wiskunde-leraren voor deze niet-mathematische richtingen hebben. De H.B.S.-a loopt 3 jaar gelijk op met de H.B.S.-b, Gymnasium a en b volgen 4 jaar lang hetzelfde leerplan. Blijkbaar nemen we allen zonder bedenken als axioma aan, dat deze schooltypen met minder wiskunde zich naar de behoeften van de b-opleiding hebben te richten.

Zo bezien zou het probleem dus zijn: wat moeten we doen in die laatste 2 jaar van de a-afdelingen van H.B.S. en Gymnasium in die 2 uurtjes per week, die daar voor wiskunde zijn uitgetrokken. Voor we het probleem zo stellen, dienen we eerst te onderzoeken of dat axioma, dat de onderbouw zich met zijn wiskunde-leerplan helemaal op de behoeften van de b-richting heeft in te stellen, niet aanvechtbaar is.

Volgens de Statistiek van het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs werden in 1942 voor het eerst tot de eerste klasse van een middelbare school toegelaten 13.179 leerlingen. In 1948 slaagden voor het eindexamen H.B.S.-b 4610 leerlingen en voor het examen Gymnasium-b 836 leerlingen.

---

[1]) Dit artikel werd gepubliceerd in het tijdschrift „Vernieuwing" van de werkgemeenschap voor vernieuwing van opvoeding en onderwijs (W.V.O). (Uitgave Muusses, Purmerend); 8e jg, nr. 70, blz. 154 e.v.

Vergelijken we die cijfers, dan zien we dat van de 10 leerlingen in een eerste klas zowat 4 het tot een eindexamen voor een b-diploma brengen. Van de anderen slagen er nog 3 voor H.B.S.-a, Gymnasium-a of Middelbare Meisjes School en de overige 3 verlaten de school tussentijds.

Van de leerlingen die de H.B.S.-b doorlopen gaat 42 % naar hogeschool of universiteit, van de b-gymnasiasten 72 %, samen dus nog niet de helft. De anderen gaan in beroepen waar een a-diploma ook voldoende zou zijn geweest. Als we dan nog bedenken dat van de b-leerlingen die naar de universiteit gaan de grootste groep gevormd wordt door de aanstaande medici, dan blijkt wel dat we bezig zijn de overgrote meerderheid van de leerlingen aan te passen aan de al of niet terecht veronderstelde behoeften van een heel kleine minderheid. Nog erger wordt het als we bedenken, dat ons onderwijs in de lagere H.B.S.-klassen min of meer normgevend is voor de Ulo-scholen, waar men er een eer in stelt hetzelfde te presteren als op een 3-jarige H.B.S.-opleiding.

Als ons wiskunde-leraren gevraagd wordt of wiskunde-onderwijs voor a-leerlingen wel nodig is, een vraag die zo nu en dan aan de orde gesteld wordt, dan zijn we gauw in het geweer en weten uiteen te zetten hoe belangrijk de vormende waarde van ons vak is ook voor alpha's. In de practijk handelen we anders, want we houden bij de keuze van de leerstof voor die alpha's alleen rekening met wat we voor de b's denken nodig te hebben.

We rijden met de B's per sneltrein van Amsterdam naar Haarlem en haken onderweg de A's in Halfweg af, in plaats van ze bijvoorbeeld naar Zaandam te brengen.

Gaan we nu na waardoor de stof van de b-opleiding bepaald wordt, dan blijken daar in hoofdzaak 3 factoren werkzaam:

1. De traditie, deze heeft een conserverende tendenz.
2. Het mechanisme van het eindexamen, dit heeft een degenererende invloed.
3. De eisen, die de maatschappij telkens weer stelt, deze hebben een regenererende uitwerking.

Ik wil die 3 punten eerst nader toelichten.

Dat de traditie op ons onderwijs van grote invloed is, weten we wel allemaal. Over het algemeen zijn we zeer tevreden met het peil dat ons onderwijs heeft bereikt. Ieder mens is van nature geneigd te vinden dat hij het goed met zichzelf heeft getroffen. In de regel wordt hij wat wijzer gemaakt door de critiek van zijn medemensen, maar leraren en onderwijzers hebben een beroep, waarbij ze het grootste deel van de dag de wijsheid alleen in pacht hebben. Het

kan dus wel niet anders of hun vermogen zichzelf critisch te bekijken, ligt gemiddeld beneden de middelmaat, hoeveel andere voortreffelijke eigenschappen ze daartegenover ook weer mogen hebben. Als tweede niet onbelangrijke factor komt daarbij, dat we tegenwoordig aan onze scholen onder erg ongunstige omstandigheden moeten werken: lange werktijden, volle klassen, lage salarissen waardoor velen genoodzaakt zijn bijverdiensten te zoeken in de avonduren; dit alles maakt het onderwijs vermoeiend en werkt daardoor het automatisme erg in de hand. Alle waar is naar zijn geld en een overheid die enige tientallen jaren achtereen uit is op onderwijs op een koopje, blijft op de lange duur met leerkrachten zitten die meer en meer op gramofoonplaten beginnen te lijken in plaats van op levende mensen.

Verder mist de leraar ieder contact met de maatschappij, hij leeft in zijn afgesloten schoolwereld; hij ervaart weinig van de ontwikkeling, die zijn vak doormaakt vanaf het ogenblik dat hij de universiteit heeft verlaten en in het geheel niets van wat verschillende maatschappelijke beroepen voor wiskundige verworvenheden vragen. Dit wat betreft de remmen die de leraar zelf in zich heeft.

Daarnaast staan de uitwendige remmen, angsten van ouders en (of) directeur wanneer een leraar andere wegen gaat bewandelen dan de algemeen betreden paden, die het hem moeilijk maken gebruik te maken van de kleine speelruimte die hem gelaten is wat betreft keuze en volgorde van de leerstof. Tenslotte de tijdnood waarin hij raakt zodra hij proberen wil te experimenteren: het banen van een nieuwe weg, ook al is die op den duur korter, kost aanvankelijk bijna altijd meer tijd dan het bewandelen van gebaande wegen. En zoveel te veel tijd om met het bestaande programma klaar te komen is er nu eenmaal niet. Daarmee zijn we dan eigenlijk gekomen aan het volgende punt: het mechanisme van het eindexamen, speciaal van het schriftelijk gedeelte. Het centraal geregeld schriftelijk examen bedoelt te waarborgen dat het onderwijs aan geen school beneden een bepaald standaardpeil kan dalen. Daarvoor worden aan alle candidaten over het hele land dezelfde opgaven voorgelegd en het al of niet kunnen maken van deze opgaven beslist in hoofdzaak over het eindexamencijfer. Wel is er ook een mondeling examen waarin in plaats van vraagstukkenroutine ook wiskundige kennis en wiskundig inzicht kunnen worden getoetst, maar de practijk wijst uit, dat dit mondeling examen zelden meer invloed heeft dan het verhogen of verlagen van het cijfer voor het schriftelijk met 1 punt.

Tenslotte is het schriftelijk examen een objectieve test en wat

kan er met mondelinge examens niet gehannest worden. Het gevolg is, dat bij de opleiding voor het eindexamen het zwaartepunt komt te liggen bij de vraagstukken-training. Nu blijkt het ook weer in de practijk, dat er met veel stomme oefening en veel ezelsbruggetjes veel schijnresultaten te bereiken zijn. Het schriftelijk examen blijkt daardoor niet zo goed selecterend te werken. Welke H.B.S.-leraar is nooit eens heimelijk blij geweest omdat Jantje of Pietje, die mondeling beslist door de mand zou zijn gevallen met een 7, op het schriftelijk net zijn vrijstelling in de wacht sleepte? Het gevolg is weer dat van andere zijde geprobeerd wordt opgaven te bedenken die meer als intelligentie-test zijn ingericht en met routine-handigheid alleen niet te maken zijn. Bij zulke gelegenheden zijn de resultaten zo catastrofaal dat er bij het aansluitend mondeling examen bij uitzondering extra clementie moet worden aanbevolen. Het eindexamenrepertoire is dan echter voor de volgende jaren met een nieuwe variant verrijkt en iedere serieuze candidaat kan voortaan ook dat vraagstuk oplossen. Nieuwe drukken van leerboeken geven het een aparte paragraaf tussen de theorie en de nieuwe examenopgaven zullen varianten op die variant moeten bevatten, wil het examen zoals dat heet op peil blijven. Dit is de manier waarop het mechanisme van het examen de bestaande leerstof beinvloedt. Het voegt aan de bestaande stof steeds nieuwe overbodige of schadelijke onderwerpen toe, die als gezwellen woekeren op de gezonde stof totdat de dood intreedt van het aangetaste onderdeel. Zo overleden op het gymnasium indertijd de boldriehoeksmeting en de planimetrie en zo wordt op de H.B.S. op het ogenblik de beschrijvende meetkunde bedreigd. Niet omdat die onderwerpen zelf minder geschikt zijn (wie zou niet graag de beginselen van de bol-trigonometrie geven in plaats van een heleboel poespas die tegenwoordig bij de vlakke driehoeksmeting behandeld wordt), maar omdat die hoofdstukken zijn doodgeëxamineerd. Geen examinator kan meer een vraagstuk bedenken dat aan de ene kant moeilijk genoeg is om bij $\pm$ 25 % van de candiaten een onvoldoend cijfer op te leveren, terwijl de moeilijkheden aan de andere kant althans nog in ver verwijderd verband staan met het te examineren onderwerp zelf. Het vak is niet meer te examineren, wordt niet meer geëxamineerd, en dus niet meer onderwezen.

Het eindexamen van de B-afdelingen is hier niet aan de orde en het is ook niet mijn bedoeling om hier te gaan pleiten voor een andere opzet van het examen, maar het was nodig te laten zien, hoe het examen ons hele onderwijs een bepaalde kant op drijft. Het gaat er uitzien alsof wiskunde de kunst is om allerlei vraagstukken op

in onder- en bovenbouw ook verschillend. Het programma van de bovenbouw wordt practisch bepaald door de exameneisen. We kunnen de leerstof van de bovenbouw alleen ingrijpend veranderd krijgen door er voor te ijveren dat de examenstof wordt herzien. In de onderbouw hoeven we niet stil te zitten tot de officiële leerplannen zijn veranderd. Wanneer we bijvoorbeeld van mening zijn, dat A-leerlingen beter af zijn met kennis van goniometrische functies, logarithmen en eenvoudige differentiaalrekening, dan met ingewikkelde wortelvormen of de ontbinding in factoren van $x^4 + 4y^4$, dan zal het op veel scholen nu al mogelijk zijn de leerstof zo in te delen, dat hieraan wordt tegemoet gekomen.

Wat de keuze van de leerstof betreft, zal in de onderbouw de doorslag moeten geven welke leerstof op een bepaalde leeftijd psychologisch het best verantwoord is, moet dus allereerst gelet worden op de behoeften van de leerling, terwijl in de bovenbouw meer de nadruk komt te liggen op wat de maatschappij aan kennis verlangt. Streng te scheiden zijn deze dingen natuurlijk niet, het is vooral een kwestie van accent.

Over de keuze van de leerstof voor de verschillende schooltypen wil ik verder niet al te veel zeggen. Dit zal in volgende besprekingen voor elke richting apart uitvoerig moeten worden bekeken. Bij de A's van het gymnsaium gaat 56 % naar de universiteit; het ligt dus voor de hand rekening te houden met verlangens van de juridische faculteit, die bijvoorbeeld statistische wiskunde zou kunnen wensen. De H.B.S.-a leerlingen verspreiden zich meer diffuus; de grootste groep (27 %) is die van de handels- en kantoorbedienden; 15 % wordt onderwijzer, 13 % gaat naar de hogeschool. Het ligt voor de hand ook daar aan statistische wiskunde te denken. Al te ver moeten we met de specialisatie niet gaan; het is voor ieder mens nuttig statistisch materiaal critisch te kunnen hanteren en als hij dat kan, is dat ook voor de maatschappij nuttig, maar als universiteit of economische hogeschool veel van die vakbekwaamheid eisen, dan moeten ze zelf maar de nodige wiskunde-colleges voor hun studenten organiseren. Bij de juristen is daar nog wel tijd voor.

Waar ik vooral het een en ander over zeggen wil, is over de indeling en de manier van behandelen van de leerstof. Op onze Montessori-scholen hebben we de mogelijkheid onderzoekingen te doen onder omstandigheden, die op andere scholen onbestaanbaar zijn. We beginnen daardoor te beschikken over ervaringsmateriaal dat buiten onze scholen vrijwel onbekend is. Die omstandigheden zijn, dat bij ons de leerlingen een groot gedeelte van hun tijd (van

ca. 80 % in klasse I tot ca 30 % in klasse V) in hun eigen tempo kunnen werken aan het vak, dat ze kiezen. Speciaal voor wiskunde is tot Kerstmis in de 6e alle tijd vrije werktijd, alleen neemt naar boven toe de mogelijkheid van vrije vakkeuze af, daar de meeste andere vakken in de loop van de 5e geheel klassikaal worden. Alle cijfers en andere gegevens zijn ontleend aan het Lyceum in Rotterdam; op de andere scholen liggen de dingen in detail anders, in hoofdzaak eender.

Het werken in eigen tempo houdt bij ons niet alleen in, dat de ene leerling aan hetzelfde werk eventueel de dubbele of driedubbele tijd kan besteden als de andere, zoals dat bijvoorbeeld ook op Daltonscholen min of meer het geval is, maar dat hij een bepaald onderwerp waar hij zekere vorderingen in heeft gemaakt een paar maanden kan laten rusten en bezinken om het dan weer fris op te nemen. Het blijkt dat bij deze werkwijze de stof veel beter verwerkt wordt. Zo blijkt het bijvoorbeeld niet goed te zijn zoals in de meeste leerboeken gebruikelijk is, alle theorie van de kwadratische functies en vierkantsvergelijkingen in een run door te werken. De leerling die pas kort met vierkantsvergelijkingen heeft kennis gemaakt, staat in het algemeen onwennig tegenover bijvoorbeeld de symmetrische functies van de wortels. Enige maanden later is dat niet meer zo. In die tussentijd heeft hij dan iets heel anders, bijvoorbeeld logarithmen gedaan, is in de meetkunde bij vraagstukken met algebraische analyse en passant enige malen tegen vierkantsvergelijkingen aangelopen en is die gaandeweg gewoon gaan vinden.

Bij het woord tempo denken we meestal aan de tijd die nodig is om een afgemeten portie werk te verzetten, maar de individuele verschillen wat betreft de nodige „bezinktijd" liggen weer heel anders dan deze tempo-verschillen.

We krijgen meer en meer de indruk dat er in principe geen stof bestaat die voor welke leerling ook te moeilijk is, mits die stof maar goed wordt voorbereid door vroeg genoeg de grondslagen ervoor te leggen.

Onze werkwijze stelt ons ook in staat na te gaan wat van ons leermateriaal de goede vorm heeft gevonden en wat niet. Als het niet deugt, blijkt dat uit 2 symptomen: 1e iedereen stelt het uit tot het laatste, en 2e is het materiaal gewoonlijk zoek. Dat laatste berust daarop, dat er de een of ander is die er niet toe kan komen om het af te maken maar er ook niet toe kan komen om het openlijk op te geven en het dus blijvend onder zijn berusting houdt.

In het algemeen blijkt nu al het materiaal, dat te vroeg met

abstracties begint, niet te voldoen. Terwijl een kind uit de eerste klas met veel genoegen geschikt gekozen beschrijvende meetkunde opdrachten maakt, netwerken van allerlei lichamen construeert, soorten van symmetrie leert onderscheiden en te vinden is voor elk zinvol werk waarbij bovendien nog te knippen, te kleuren of te plakken valt, moet je hem liever niet aankomen met het verschil tussen stellingen en axioma's. Wel is een degelijke behandeling van de grondslagen van de meetkunde in V-a bijvoorbeeld in de eerste al voor te bereiden door experimenten met de band van Möbius en door de kinderen aan de hand van kegel, bol en cylinder in eerste aanraking te brengen met begrippen als geodetische lijn, ontwikkelbare en niet ontwikkelbare oppervlakken.

Om misverstand te voorkomen: dat we op onze scholen te werk gaan als boven is aangegeven is niet in de eerste plaats begonnen ter wille van didactische voordelen, maar omdat bij ons de harmonische ontwikkeling van het kind uitgangspunt is. Dat deze methode bovendien didactische voordelen oplevert, is een verblijdend nevenverschijnsel. Ze blijken onder andere uit het percentage zittenblijvers, dat bij ons lager is dan gemiddeld op de andere scholen. In de eerste 2 jaar ligt dat bij ons beneden de 10 %; naarmate het onderwijs meer klassikaal wordt, stijgt ook dit percentage totdat het in de (op het eind van het jaar bijna geheel klassikale) 5e juist dezelfde 30 % bereikt die de statistiek vermeldt voor de 5e klassen van gewone lycea.

Als het nu alleen zo was, dat wij in de lagere klassen de kinderen bijzonder verwenden, dan moest dat zich in de hogere klassen wreken doordat er daar veel meer uitvielen. Dat is niet zo. Van de 32 gymnasiasten in de derde klasse belanden er bij ons 23 zonder doubleren in de 5e, op andere lycea gemiddeld 18. Maar die 5 die het bij ons wel halen blijken dezelfde kansen te hebben als de andere 18.

Als conclusie van deze inleiding zou ik als richtlijnen voor willen stellen:

1. Niet meer mee doen aan de vraagstukkencultus.
2. Onderwerpen die op iets anders voortbouwen, daarop niet te snel laten volgen, maar rekening houden met een zekere bezinktijd.
3. Vooral in de beginjaren zo concreet mogelijk leermateriaal; de geest tijd geven om voor abstractie rijp te worden.
4. De systematische samenhang van de theorie liever later goed geven, dan in het begin slecht; alleen wie de theorie al kent kan zich voor de samenhang ervan interesseren.

5. Veel zogenaamde B-stof kan verhuizen naar de onderbouw, zelfs naar het eerste jaar, mits van alle gekunstelde opschik ontdaan: in de algebra bijvoorbeeld de meetkundige reeks als voorbereiding voor het limietbegrip en de logarithmen; in de meetkunde bijvoorbeeld de beschrijvende meetkunde, maar dan niet zo dat mechanisch uitgevoerde kunstgrepen over een tekort aan ruimtelijk voorstelligsvermogen heen moeten helpen, maar dat juist een beroep op dat voorstellingsvermogen moet worden gedaan om over technische moeilijkheden heen te komen.

Ik heb me in deze punten proberen te beperken tot die dingen die op een klassikale school niet tot de onmogelijkheden behoren. Natuurlijk moet de leraar die eraan begint een zekere gevestigde reputatie hebben, zodat hij zich de luxe kan permitteren en hij moet met de B's het risico durven nemen, dat hij ze voor een examen voor puzzelaar op laat gaan, terwijl hij ze alleen maar voor wiskunde heeft opgeleid. Hij zal waarschijnlijk meer zessen oogsten dan tienen, maar daar staat tegenover dat de jongens voor hun latere studie een betere basis hebben gekregen dan met de puzzle-dressuur terwijl de A-leerlingen voor een wiskunde-complex bespaard zijn gebleven.

Behalve onze observaties wat betreft tempo-verschillen bij het zich aanpassen aan nieuwe leerstof en omtrent welke stof op een bepaalde leeftijd gewenst is hebben we nog waarnemingen gedaan op heel ander gebied die geen didactische, maar uitsluitend paedagogische perspectieven openen. Ze betreffen de instelling van het kind op verschillende leeftijden ten opzichte van het schoolwerk. Globaal ingedeeld zijn de kinderen van 12 tot 14 tuk om te leren, ze verslinden ieder enigszins verteerbaar leermateriaal. Van 14 tot 16 is er vooral bij de jongens een duidelijke omkeer merkbaar. Er ontstaat op die leeftijd een sterke behoefte sociaal nuttig werkzaam te zijn. Het tot zich nemen van geestelijk voedsel, alleen ten eigen bate, is geen levensvulling meer. Ze blijven het meestal wel tot zich nemen evenals het lichamelijke voedsel, hoewel er extreme gevallen zijn die zowel het een als het ander saboteren. Het is de leeftijd waarop ze zich generen voor goede proefwerken of mooie tekeningen, maar spontaan overuren maken als het gaat om een of ander collectief werkstuk: decors schilderen voor een toneelstuk of inrichten van een tentoonstelling. Het is de gevoelige periode bij uitstek voor de ontwikkeling van de sociale kanten van het karakter.

Op deze leeftijd wordt grotendeels beslist of we later een mens zullen krijgen die een verantwoordelijk deel van een gemeenschap

uit kan maken of een egocentrische individualist, die zijn gemis aan gemeenschapsleven van tijd tot tijd compenseren moet door zich samen met anderen in een roesstemming over te geven aan uitbarstingen van collectieve bezetenheid. In plaats van in schoolverband lezingen te organiseren over goed democratisch staatsburgerschap, terwijl we de kinderen verder als 12-jarigen blijven behandelen, konden we op deze leeftijd beter practische oefeningen organiseren in het doen van verantwoordelijk werk in gemeenschapsverband. Dit zou inhouden dat we veel tijd moesten kunnen uittrekken voor toneel, zang en orchest, handenarbeid, vooral ook productieve handenarbeid die geldelijk gehonoreerd wordt als bewijs dat het werk maatschappelijk nut heeft gehad.

De tijd hiervoor hopen we op den duur te winnen door het onderwijs tot 14 jaar nog effectiever te maken. We hebben de indruk dat de kinderen in de laatste jaren van de lagere school niet die leerstof krijgen waar ze behoefte aan hebben. In die jaren zou al veel voorbereidend werk gedaan kunnen worden, niet alleen op het gebied van de wiskunde, maar ook op dat van biologie, natuurkunde, scheikunde, sterrekunde. Om dat veranderd te krijgen zal er echter ook het een en ander veranderd moeten worden aan het wiskunde leerplan en dat voor andere vakken van een niet mathematisch schooltype dat eigenlijk ook onder het middelbaar onderwijs zou moeten vallen: de kweekschool voor onderwijzers.

MOEILIJKHEDEN IN DE MEETKUNDE PROGRESSIE EN REGRESSIE

door

Dr W. J. Bos

Dr L. N. H. Bunt heeft een paar belangwekkende artikelen gewijd aan de moeilijkheden, die de leerlingen ondervinden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken.[1])

In het volgende is gepoogd, de moeilijkheden die optreden in een groot gebied van de vlakke meetkunde, namelijk de „bewijzen"[2]), onder een systematisch gezichtspunt te behandelen. Evenwel brengt dit gezichtspunt met zich mee, dat o.a. de typische moeilijkheden uit de eerste klas buiten beschouwing zullen blijven.

„Moeilijkheid" kan slechts betekenen: *moeilijkheid in een bepaalde, concrete probleemsituatie*, d.w.z. voor *deze* leerling (met zijn ervaring en denkgewoonten), op *dit* moment, met *dat* vraagstuk (of beter: in *die* bepaalde phase van de oplossing van dat vraagstuk).

Als men spreekt over „de moeilijkheid van een vraagstuk"[3]), dan veronderstelt men daarbij in de eerste plaats een zekere eensgezindheid in oordeel over de „gemiddelde" leerling en zijn „normale" kennis en oefening. (Bij de volgende beschouwing zullen wij aannemen, dat onze meningen hierover niet ver uiteenlopen.) Verder kan de moeilijkheid van een vraagstuk, zelfs als de plaats (meetkundige relatie) waar deze optreedt voor alle leerlingen dezelfde is, toch, wat aard betreft, nog zeer sterk verschillen. Deze verschillen ontstaan niet alleen door individuele denkeigenaardigheden, maar in belangrijke mate door verschil in *aanpak* van het probleem.

---

[1]) Paedagogische Studien 23 (1946), 178—189, 202—215; Euclides 22 (1946—1947), 168—190.

[2]) Vele moeilijkheden, die hierbij ter sprake zullen komen, treden echter ook op bij constructies en berekeningen.

[3]) Indien men uitgaat van een normale groep is het mogelijk „de moeilijkheid van een vraagstuk" te „bepalen" als het percentage, dat er niet in slaagt het vraagstuk binnen een zekere tijd op te lossen. Een onderzoek in deze richting kan misschien wel zin hebben, bijv. voor het opstellen van normale eisen, maar het geeft ons geen dieper inzicht in de aard van de moeilijkheden.

te lossen, waarbij dan de theorie de functie heeft die vraagstukken te classificeren. Deze houding tegenover het vak werkt ook naar beneden in de school door. Met onze schriftelijke proefwerken tenteren we in de regel niet alleen of de behandelde theorie goed is verwerkt, maar ook of vraagstukken van een min of meer puzzle-achtig karakter kunnen worden opgelost, in de hoop op die manier die leerlingen vroegtijdig uit te schiften, die uit gebrek aan inventiviteit later zeker op het examen zouden stranden. En we breiden de theorie uit met complicaties van complicaties om te kijken wie van de kinderen dat allemaal tegelijk nog kan verwerken zonder in de war te raken. Zo krijgen we bijvoorbeeld vraagstukken als:

Herleid: $\sqrt{\{3a + 1 + 2\sqrt{(2a^2 + 3a - 2)}\}}$.

Dit zijn problemen die nergens in de wereld ooit voorgekomen zijn; ze zijn alleen uitgevonden ten bate van het onderwijs, beter gezegd als hulpmiddel voor de leraar bij het cijfers gegeven.

Hij meent met zulke vraagstukken de leerlingen te kunnen testen op wiskunde-aanleg. Ook dit is een illusie. Er zijn zoveel andere factoren in het spel. De echte wiskunde-keien zullen het met zo'n vraagstuk wel klaren, al was het alleen omdat ze er een soort van sportief genoegen in vinden iedere hindernis te kunnen nemen. Maar bij de anderen is de correlatie tussen wiskundige vermogens en resultaten met zulke vraagstukken heel klein. Wanneer we vraagstukken opgeven die geen normaal mens kunnen interesseren, ligt het voor de hand dat veel normale mensen het er slecht af zullen brengen. De problemen en emoties die de jongens in de puberteit bezighouden zijn vele. Goede wiskunde-proefwerken bij vraagstukken van dit soort kunnen evengoed wijzen op een onontwikkeld gevoelsleven, op een gestoorde interne secretie of op een abnormale eerzucht als op wiskunde-aanleg. Was deze manier van tenteren goed, dan zou het collectief zitten blijven (30 % van de jongens in elke H.B.S. klasse) na hoogstens 2 jaar op moeten houden. Nu is de toestand zo, dat wij zelf klagen over het slechte leerlingen-materiaal dat de lagere scholen ons ieder jaar durven aan te bieden. We zetten daar eerst flink het mes in met onze toelatingsexamens en wijzen ruim 15 % af. Daarna zeven we 4 jaar lang op de H.B.S. 30 % er uit, op het gymnasium 5 jaar lang 24 %; daarna zakt 20 % voor het eindexamen en het resultaat is dat de professoren klagen over het slechte studentenmateriaal dat wij durven af te leveren. Ten behoeve van dit slecht functionnerend selectie-systeem laten we ieder hoofdstuk in ons wiskunde-onderwijs culmineren in vraagstukken van dit onpaedagogische soort. Aan dit geestelijk voedsel laten we de 60 % van onze leerlingen die het B-diploma

niet halen, zich zo overeten, dat ze hun leven lang geen wiskunde meer zien kunnen en hun kinderen en kindskinderen blijven opvoeden in het geloof, dat wiskunde een spelletje is dat onderhoudend wordt gevonden door lieden met een verschraald gemoedsleven, die niets beters hebben om hun bestaan mee te vullen, maar een verschrikking is voor gewone mensen.

Als derde kracht die het onderwijs voor de B's beinvloedt en daarmee bij de tegenwoordige gang van zaken ook het aanvangsonderwijs voor de A's heb ik genoemd de invloed van de maatschappij. Deze is maar heel zwak doordat de leraar met de practijk van zijn vak meestal geen contact heeft. Dat er buiten de school veel critiek op het onderwijs is, weten we wel; de ene keer reageren we er op met hautain afwijzen: kijk dan maar eens naar al die knappe ingenieurs en grote geleerden die ons onderwijs heeft voortgebracht; de andere keer zijn we geneigd het roer om te gooien, maar we hebben geen notie welke kant op omdat we iedere orientatie missen. Daardoor blijft veel van wat voor onderwijs-vernieuwing door wil gaan dilettantistisch prutswerk. Toch blijft als resultante van dit schijnbaar chaotisch heen en weer bewegen een langzame stroming over in de richting van het zwakke krachtveld. Zo werd een jaar of 12 geleden de eerste zwakke poging gedaan het vak differentiaalrekening op de H.B.S. een kans te geven.

Veel is daar niet van terecht gekomen, maar bij ons werk in de W.V.O. verleden jaar, is wel gebleken, dat men nu al in brede kring bereid is veel heel of half dood hout weg te snoeien om deze nieuwe ent licht en ruimte te geven.

Als voorlopige conclusie zou ik willen geven: Als we het alphawiskunde-onderwijs willen gaan bekijken, moeten we niet alleen letten op de laatste 2 jaar, maar vooral ook op de voorafgaande jaren. Wel moeten we beide onderdelen afzonderlijk onder handen nemen, omdat voor onderbouw en bovenbouw de problemen en de mogelijkheden verschillend liggen.

In de onderbouw zijn de leerlingen van A-richting en van B-richting nog bij elkaar, samen met de leerlingen voor wie die onderbouw tevens eindonderwijs is. Het onderwijs daar zal algemeen vormend wiskunde-onderwijs moeten zijn. Het moet te volgen zijn voor iedere leerling die van goede wil is en we moeten het zo inrichten, dat er een basis gelegd wordt voor iedere studie in welke speciale richting dan ook.

In de bovenbouw komen de speciale belangen van de afzonderlijke opleidingen meer naar voren. Daar mag de specialisatie pas beginnen. De practische mogelijkheden om het onderwijs te veranderen liggen

Onafhankelijk van een zekere probleem-aanpak kan een moeilijkheid niet omschreven worden. „Moeilijk vraagstuk" is als globale aanduiding zeer zeker bruikbaar, maar men zal zich toch rekenschap moeten geven van het feit, dat een moeilijkheid pas ontstaat als er over het vraagstuk nagedacht wordt; zodat het karakter van de moeilijkheid mede afhangt van de richting waarin het probleem benaderd wordt.

Probleem-aanpak zal ongetwijfeld voor alle docenten omvatten: het maken van goede figuren, het opschrijven van gegevens en te bewijzen, maar wat nog meer? Het leren van een vast systeem van tactische methoden zoals G. Polya [1]) aanbeveelt in „How to solve it?", met de veelbelovende ondertitel: „A system of thinking which can help you solve any problem", zal bij ons waarschijnlijk niet plaats vinden. Maar wel geven wij suggesties en stellen wij vragen: „Kijk nog eens naar je gegevens!"; „Wat betekent dit?"; „Hoe bewijs je zoiets?"; „Waar lijkt dit op?"; „Kan dit goed zijn?"; „Wat heb je hiervoor nodig?"; enz. In de eerste plaats versterken deze vragen het „Aufgabebewusztsein", en daarmee de „determinerende tendentie" [2]) (Ach), maar verder ligt toch aan het stellen van deze vragen de verwachting ten grondslag, dat de leerlingen op den duur zichzelf deze vragen zullen gaan stellen. D.w.z., dat zij hierdoor zullen leren op een doelmatige wijze zelf hun problemen aan te pakken.

Wij beperken ons nu verder tot moeilijkheden van leerlingen, die begrijpen waar het bij het vak meetkunde om gaat; d.w.z. wij onderstellen:

1) dat een leerling een vraagstuk als *denk-opgave aanvaardt*; dat hij dus niet zegt: „ik weet het niet meer", maar eventueel wel: „ik kan het niet vinden".

2) en wel als *meetkundig vraagstuk*; dat hij zich dus de taak oplegt om door de „leegte" tussen gegevens en te bewijzen een verbinding tot stand te brengen, die aan bepaalde eisen voldoet.

3) dat hij weet zich, zo nodig, te moeten bezinnen op de *betekenis* van de begrippen.

4) dat hij uit ervaring weet, dat deze verbinding van „*beide kanten*" af tot stand gebracht kan worden; dat dus zowel het zoeken naar gevolgen als naar middelen nodig kan zijn.

---

1) Princeton University Press (1945).

2) De grote betekenis hiervan komt in de onderzoekingen van de Denkpsychologen sterk tot uiting.

Het laatste punt betekent, dat in zijn denken *regressieve momenten* (Wat heb ik hiervoor nodig?, enz.) en *progressieve momenten* (Wat volgt daaruit?, enz.) kunnen optreden. (Waarbij het niet nodig is dat hij deze vragen ook werkelijk formuleert, als hij maar in deze richtingen zoekt). Evenzeer als de progressieve momenten ter zake, ten doele, zijn, hebben de regressieve momenten ook steeds betrekking op hetgeen in de figuur te zien is, en daarmee op de gegevens. Het onderscheid progressief-regressief betekent een verschil in aanpak van het probleem als geheel; een verschil in standpunt, dat wordt ingenomen ten opzichte van de „gap" tussen gestelde en ondersteIde. De overgang van regressief naar progressief (en omgekeerd) houdt een verandering van gezichtspunt in; met de Gestaltpsychologen zou men kunnen zeggen: is een structuurverandering van de probleemsituatie.

Niet met het voorleggen van het probleem, maar eerst met het aanpakken van het probleem rijzen de moeilijkheden.

Als uitgangspunt voor een systematische ordening van de moeilijkheden nemen wij nu aan, dat een leerling aanvankelijk naar middelen gaat zoeken; zodat de volgende twee vragen rijzen:

1) Welke moeilijkheden ontmoet hij bij deze regressieve aanpak?

2) In hoeverre vermindert een overgang op progressieve richting deze moeilijkheden?

Wij beweren niet, dat elke oplossing door systematisch denken gevonden wordt. Voor een goede leerling krijgt een vraagstuk vaak „lijn", zodra hij het probleem tot zich heeft laten doordringen. En als wij bedenken, dat de meeste vraagstukken die wij onze leerlingen voorleggen, „*geplaatste*" vraagstukken zijn (d.w.z. vraagstukken, die worden opgegeven in verband met — als toepassing van — een bepaald stuk theorie), dan is het zelfs zo, dat ook de zwakkere broeders bijvoorbeeld reeds dadelijk weten: dit wordt iets met koordenvierhoeken. Maar als ondanks de lijn, die gezien wordt, bij nadere beschouwing toch moeilijkheden rijzen, als het bewijs toch vastloopt, dan doet dit zich in de probleemsituatie voor als een „te overbruggen opening". Het tot stand brengen van de verbinding kan dan van een van beide kanten af, of afwisselend vanaf beide kanten, beproefd worden. De onderstelling, dat de eerste poging dan in middelzoekende richting gedaan wordt, is begrijpelijk, als men bedenkt dat een systematische progressie meestal zinloos is. Bij elke figuur kan men, behalve de gegevens, steeds een groot aantal betrekkingen tussen hoeken en tussen lijnstukken opschrijven. Eerst als men weet in welke richting de op-

lossing gevonden moet worden, komt een progressief uitgangspunt in aanmerking. (Vgl.: IIIB, gebonden progressie.)

Ter verduidelijking beschouwen wij nu het volgende vraagstuk:

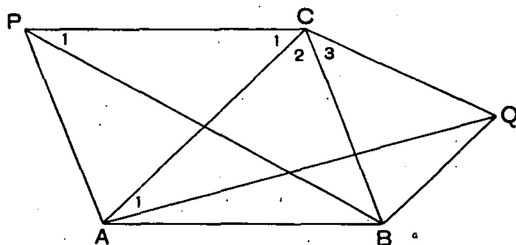


Fig. 1.

Geg.: AC = PC, BC = QC, $\angle C_1 = \angle C_3$. Te bew.: $\angle P_1 = \angle A_1$. Wij stellen ons nu een leerling voor, die niet zoveel kijk op figuren heeft, dat hij dadelijk de congruentie ziet, maar die denkend een oplossing moet vinden. De grote gecompliceerdheid en het dynamisch karakter van elk denkproces maken het noodzakelijk te volstaan met een poging om de belangrijkste phasen te noemen:

(*a*) Instellen op het probleem. (*b*) En wel regressief: gelijkheid van hoeken te bewijzen. (*c*) Hierdoor wordt middelen-kennis geactiveerd, waardoor (eventueel na de verwerping van andere mogelijkheden) het vermoeden „congruentie" rijst. (*d*) Als dit vermoeden opkomt, ontstaat het besef dat dit, in verband met de gegevens, (gelijkheden van lijnstukken) aannemelijk is. Dus dat congruentie, behalve als middel, ook als gevolg in de lijn ligt. Daardoor wordt het vermoeden versterkt. (*e*) Zoeken van congruente driehoeken. $\angle P_1$ en $\angle A_1$ moeten elementen zijn (regressief). Ook aandacht voor de gelijke lijnstukken (progressief). (*f*) Het opmerken van de driehoeken AQC en PBC, gepaard met de zekerheid dat deze congruent zijn, en ook met de zekerheid dat deze congruentie als middel voldoende is. De leerling beseft, dat hij er bijna is; dat de congruentie uit de gegevens moet volgen, maar hij twijfelt nog wel of het hem lukken zal dit aan te tonen. (*g*) Hij ziet in dat nog een gelijkheid nodig is (regr.), samenhangend met het gegeven $\angle C_1 = \angle C_3$ (progr.). (*h*) Het zien van $\angle C_{12} = \angle C_{23}$ als gevolg en als ontbrekend middel.

Hoewel deze gedachtengang als geheel in regressieve richting verloopt, zijn toch ook progressieve momenten aanwezig; terwijl juist bij die stappen waarmee een verbinding tot stand gebracht wordt (de congruentie bij het probleem als geheel, $\angle C_{12} = \angle C_{23}$ bij het bewijs van de congruentie), niet meer van regressief of progressief gesproken kan worden. Inzicht in een reeks conclusies betekent dat deze als gevolgen, maar ook, in omgekeerde richting, als voorwaarden, begrepen worden. Anders gezegd: progressiviteit en regressiviteit hebben betrekking op de richting waarin een oplossing gezocht wordt, de vondst zelf is, eventueel als vermoeden, tegelijkertijd middel en gevolg.

Het spreekt wel vanzelf, dat het denkproces in werkelijkheid meestal een meer hortend verloop zal hebben. Storende factoren, zowel van buiten als innerlijke, maken het herhaaldelijk nodig, dat de leerling zich opnieuw instelt en de gevolgde gedachtengang nog eens nagaat.

Het lijkt misschien overbodig zoveel aandacht te besteden aan, het denkproces begeleidende, verschijnselen, zoals sterkte van vermoedens, schattingen (dit ligt in de lijn, ik ben er bijna, enz.) en gevoelens van zekerheid of twijfel. Juist deze echter stuwen en sturen de denkactiviteit. Een vermoeden „vraagt om" bevestiging, twijfel kan verlammend werken, maar „zoekt" naar zekerheid, en zekerheid zelf „stelt" geen vragen, vernauwt echter het gezichtsveld. Wij zullen hierop onder II nader ingaan, en bijvoorbeeld laten zien dat deze zekerheid in de gedaante: „zo moet het toch kunnen", een ernstige belemmering kan betekenen voor het vinden van de oplossing van een vraagstuk.

In de terminologie van de Gestaltpsychologen kunnen wij het denkproces een reeks structuurveranderingen noemen [1]). Zo betekent het zoeken naar congruente driehoeken een verandering van de structuur van de probleemsituatie, omdat dan de figuur bekeken wordt „gericht op" eventueel aanwezige congruente driehoeken; naar die speciale meetkundige relatie wordt in de figuur gezocht. Als de congruente driehoeken gezien worden, verandert echter ook het waarnemingsbeeld zelf. Oorspronkelijk zal deze figuur door de leerlingen vaak gezien worden als een driehoek met

---

[1]) De Denkpsychologie zou van een voortschrijdende „Komplexerganzung" spreken. (De oorspronkelijk aanvaarde denktaak oefent een determinerende tendentie uit op het psychisch gebeuren, en actualiseert oplossingsmethoden. Deze, op de oplossing vooruitlopende schema's (anticiperende schema) worden door de opgave bepaald).

twee gelijkbenige driehoeken, waarbij de lijnstukken BP en AQ op de achtergrond raken, of als de figuur storend worden waargenomen. (Dit effect wordt veroorzaakt door de „gute Gestalten" van de gelijkbenige driehoeken en hun ligging aan weerskanten van △ ABC.) Met het zien van de congruentie van △ AQC en △ PBC verandert dit beeld tot twee door elkaar ligende congruente driehoeken, waarbij de lijnstukken AB, AP en BQ aan betekenis verliezen (meestal zal een van de driehoeken op de andere gezien worden).

Wij zullen nu de termen „structuurverandering" en „omstructureren" reserveren voor die veranderingen, waarbij de figuur anders waargenomen, anders opgevat, wordt. De moeilijkheden die daarbij optreden zullen wij *„structurele moeilijkheden"* noemen. In het algemeen zullen wij het denkproces beschrijven als een reeks *veranderingen van de probleemsituatie.* De totale psychische situatie bij het oplossen is ongetwijfeld gestructureerd (K. Lewin: „Feldstruktur"), maar er lijkt mij geen bezwaar tegen om de term structuur hierbij weg te laten, mits men zich bewust is, dat „probeemsituatie" in een bepaalde phase van de oplossing meer omvat dan de stand van zaken, dan hetgeen reeds bereikt is. Namelijk ook: de wijze waarop, en de gerichtheid waarmee, de figuur, de gegevens en het te bewijzen bekeken worden; de relaties die vermoed worden, de gedachten en voorstellingen die daarbij opdoemen; en de gevoelens en impulsen die daarmee samenhangen. [1] [2]

Elke structuurverandering brengt dus een verandering van de probleemsituatie met zich mee.

Bij ons voorbeeld werd de figuur als geheel anders waargenomen. Vaak hoeft slechts een deel van de figuur op een andere manier gezien te worden. (Bijvoorbeeld moet een boog gezien worden als

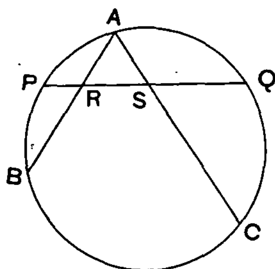
---

[1]) Vgl.: J. de Groot, Het scheppend vermogen van de wiskundige, Euclides 22, 156.

[2]) Men zou onze structuurveranderingen ook veranderingen van de figuurwaarneming kunnen noemen, mits men daarbij in het oog houdt dat de waarneming *steeds* gestructureerd is. Wij zijn echter van mening dat men in het algemeen het waarnemen nog als „aflezen" en niet als „opvatten als" beschouwt. Wij menen dat het structurele karakter van de waarneming daarom nog alle nadruk behoeft (vgl. IIIA). Terwijl wij veronderstellen dat de lezers doordrongen zijn van het feit, dat een bewijs bijvoorbeeld niet begrepen is, als slechts de juistheid van elke afzonderlijke conclusie is ingezien. De betekenis, functie van elk „element" voor het „geheel" moet ook begrepen zijn. De leerling moet bovendien inzien, dat het zo en niet anders kan, en als het ook anders kan, dat het toch zo beter (of mooier) gaat.

som of verschil van twee bogen.) Ook daar spreken wij dus van structuurveranderingen.

Bunt geeft, in een der eerder genoemde artikelen [1]), een voorbeeld van een vraagstuk „waarvan de oplossing geheel door (regressieve) redenering gevonden kan worden".



Geg.: bg BP = bg PA, bg AQ = bg QC.
Te bew.: AR = AS.

Fig. 2.

Ten einde de regressieve aanpak zo duidelijk mogelijk te belichten wil ik nog enkele opmerkingen over dit voorbeeld maken.

1) Bunt neemt aan dat een leerling „het rijtje middelen om te bewijzen dat twee lijnstukken gelijk zijn afgewerkt". Nu ben ik wel van mening dat het leren van rijtjes middelen belangrijk is, omdat de beschikbaarheid over deze middelen daardoor ongetwijfeld aanzienlijk toeneemt. (Waarbij men echter wel heeft te bedenken dat in de planimetrie, ook bij beperking tot de gewone vraagstukken, een grotere variatie aan middelen optreedt dan in rijtjes te vangen is.) Maar juist de eenvoudigheid van dit vraagstuk ligt in het feit dat het hier niet een kwestie is van keus uit middelen. De regressieve gerichtheid activeert middelen, maar ter zake! Een leerling die zich richt op AR = AS, d.w.z. op de gelijkbenigheid van de driehoek, moet zeggen: ik ben klaar als bewezen is $\angle$ R = $\angle$ S. Tenminste als zijn kennis van de gelijkbenige driehoek niet uit onbegrepen woorden bestaat, maar kan functionneren.

De onderstelling, dat hij eerst onderzocht kan hebben of AR en AS overstaande zijden van een p.g.m. zijn, is formeel juist, maar geeft een verkeerd beeld van het regressief redeneren. De middelzoekende gerichtheid is een denkende instelling op het probleem; het geheugen werkt daarbij niet mechanisch maar selecterend.

Met dit alles wil ik niet zeggen dat het afwerken van rijtjes middelen niet zinvol kan zijn, maar het is juist zinvol als er belemmeringen aanwezig zijn, die een keus uit de middelen moeilijk maken.

---

[1]) Euclides 22, 168.

2) De volgende middelkeus (werken met hoeken en bogen) betekent, als de functie van dit middel begrepen is: ga nu uit van de gegeven figuur, druk de hoeken R en S uit in bogen, enz. Bij het gebruik van dit middel wordt dus naar gevolgen gezocht (Feitelijk is het middel een gesloten keten van gelijkheden, de hoeken- en bogenstellingen zijn middel tot dit middel). In deze overigens regressieve gedachtengang treden dus progressieve momenten op (Vgl. IIIB, gebonden progressie).

Wij zullen nu eerst een overzicht geven van de verschillende groepen van moeilijkheden die in de middelzoekende situatie kunnen rijzen, waarbij wij nog opmerken dat het volgende ook betrekking heeft op reeds gedeeltelijk opgeloste vraagstukken. Terwijl wij ons verder, om bij elk voorbeeld een uitvoerige uiteenzetting te vermijden van de, daarbij aanwezig geachte, ervaring, in het algemeen op het standpunt zullen stellen dat de planimetrie „volledig" behandeld is, en de leerlingen „voldoende" oefening bezitten in het toepassen van de theorie. Deze beperking heeft dus alleen betrekking op de keuze der voorbeelden en niet op het karakter der moeilijkheden.

Overzicht.

I) Het is mogelijk dat een regressief gerichte probleemsituatie geen middelen oproept:

A) als de gestelde meetkundige relatie, wat zijn inhoud betreft, problematisch is,

B) als deze relatie wel begrepen wordt, maar als te bewijzen relatie nieuw is. Hier kan onderscheid gemaakt worden tussen de gevallen:

a) waarbij het nodige middel feitelijk bekend is, maar in een nieuwe functie gebruikt moet worden,

b) waarbij het middel nieuw of vergeten is.

Als er wel middelen bekend zijn, maar het benodigde middel is onbekend, (d.w.z. als een vraagstuk op een ongebruikelijke manier moet worden opgelost) dan moeten eerst andere middelen als ondeugdelijk verworpen worden, (te bespreken onder II) terwijl de verdere moeilijkheden behoren tot de groep I en eventueel groep III.

II) Moeilijkheden die samenhangen met de aard van de vermoedens.

III) Moeilijkheden die optreden bij de pogingen om een bepaald middel te benutten, waarbij wij eerst zullen bespreken:

A) moeilijkheden van structurele aard, en dan

B) moeilijkheden van bepaalde middelen en groepen van middelen.

Daar het bij „gewone" vraagstukken grotendeels gaat om de groepen II en III zullen wij ons, wat de groep I betreft, beperken tot enkele opmerkingen.

I

A. Als in figuur 3 bewezen moet worden dat de lijnstukken AB, AD en BE de zijden kunnen zijn van een rechthoekige driehoek, dan moet de leerling zich bezinnen op de betekenis van deze relatie. Als hij inziet, dat hij voor deze zin in de plaats mag zeggen: Bewijs dat de driehoek, die men kan construeren met AB, AD en BE als zijden, rechthoekig is, dan is er niet veel meer nodig om dit vraagstuk terug te voeren tot een gewone toepassing van de machtstelling.

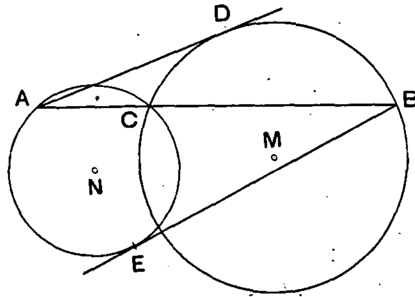


Fig. 3.

In deze gevallen is het vaak nodig dat de leerling teruggaat tot de definities van de begrippen en zodoende tot een formulering komt van de gedaante: „Ik moet dus bewijzen dat . . ."

B. Elke betrekking, die bewezen moet worden, is eens voor het eerst als gestelde opgetreden, maar werd destijds voorgelegd in nauw verband met het juist daarvoor behandelde. Bijvoorbeeld werd een gelijkheid van producten het eerste bewezen bij een reeks toepassingen van de gelijkvormigheid en kort na de behandeling van de evenredigheden. Als een geplaatst vraagstuk een nieuw gestelde bevat, hoeft dit geen grote moeilijkheden te geven. Dit zijn de vraagstukken, waarmee de functie van een nieuwe stelling als middel geleerd wordt. Zijn echter bij de gelijkvormigheid geen gelijkheden van producten bewezen, en geeft men nu een dergelijk vraagstuk pas op bij een herhaling, dan zullen zeer veel leerlingen de oplossing niet vinden.

a. Geg.: AB = BC, DE = EF,
$\angle$ ADB = $\angle$ AEC.
Te bew.: AD . DB = AE . EC.

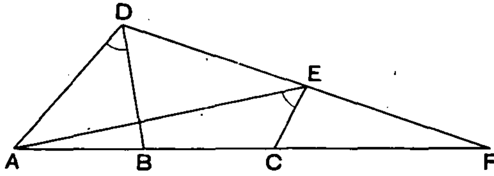
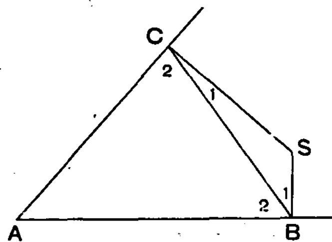


Fig. 4.

Als de leerlingen de stellingen over oppervlakken nog nooit gebruikt hebben om betrekkingen tussen lijnstukken te bewijzen, dan is dit een zeer moeilijk vraagstuk. Wordt het opgegeven, bij een proefwerk over oppervlakken, dan zal het misschien wel gaan, maar als dit niet het geval is, dan moet de leerling opmerken dat er twee driehoeken zijn, die een hoek gelijk hebben, d.w.z. hij moet de gelijke hoeken deze functie toekennen, en dat kan hem op het idee „oppervlakken" brengen (progressief). Een andere mogelijkheid is dat de gestelde betrekking hem tot de trigonometrische uitdrukking voor het oppervlak van een driehoek voert. In dat geval moet hij AD . DB eerst lezen als het product van twee zijden van een driehoek (regressief).
Het gebruiken van een bekend middel in een nieuwe functie zal bij een niet „geplaatst" vraagstuk voor onze leerlingen meestal te moeilijk zijn.

b. Er moet een werkelijk nieuw middel gevonden worden.



Geg.: $\angle$ B = $\angle$ C = 90°, AB > AC.
Te bew.: SB < SC.
Dit voorbeeld van Bunt [1]) toont dat een star volhouden van de

[1]) l.c. 169.

regressieve redenering de moeilijkheden groter maakt dan nodig is.

Als de leerling nu ontdekt heeft (regressief), dat nog te bewijzen is $\angle C_1 < \angle B_1$, en hij heeft gemerkt dat bekende middelen hier geen uitkomst brengen (hetgeen hier makkelijk is), dan ligt het toch voor de hand, dat hij zich afvraagt: „Welke gegevens heb ik en wat volgt uit deze gegevens?". Daar het gegeven $AB > AC$ slechts één conclusie wettigt, komt hij er zo toe de drie praemissen $\angle B_{12} = 90°$, $\angle C_{12} = 90°$ $\angle C_2 > \angle B_2$ bij elkaar te plaatsen. Hij moet dan nog de juistheid van een, wat vorm betreft, bekende conclusie inzien.

Bij zuiver regressief redeneren moet hij „zien . . . dat we in plaats van te bewijzen dat $\angle C_1$ kleiner is dan $\angle B_1$ ook zullen kunnen bewijzen, dat het complement C_2 groter is dan het complement B_2.[1])

Hoewel bij vele vraagstukken met een moeilijkheid van deze aard een overgang op progressieve richting de oplossing nader brengt, de moeilijkheid namelijk nauwer inperkt, zal toch in het algemeen het vinden van een werkelijk nieuw middel te moeilijk zijn voor de leerlingen.

II

Wij zullen nu onze aandacht richten op de moeilijkheden die samenhangen met de aard van de vermoedens.

De middelen treden in de probleemsituatie op als sterke of zwakke vermoedens. Bij nader onderzoek kunnen deze vermoedens versterkt worden, maar zeker van een juiste keus kan men slechts zijn als het bewijs voltooid is. Het lijkt zo eenvoudig: „Ga nu eens na welke middelen je hebt, schrijf ze desnoods op en vraag je af welk middel op het eerste gezicht het meest aannemelijk lijkt, daar kan je je in vergissen maar dat is niet erg. Onderzoek dit middel grondig, komt daarbij de oplossing niet nader, schrap dan dit middel en onderzoek het meest belovende uit de rest van de lijst, enz." Dit kan men de leerlingen nu wel zeggen, maar de grondigheid van het onderzoek hangt uiteindelijk af van de sterkte van *hun* vermoedens.

Hoe ontstaan de waarderingen die aan een geactiveerd middel gehecht worden? Wat is het verband tussen de sterke (zwakke) vermoedens en de grondigheid (vluchtigheid) van het onderzoek?

Laten wij vooropstellen dat een vermoeden niet slechts naar aanleiding van een keus uit middelen kan opdoemen, maar dat er veel vraagstukken zijn, waarbij de situatie als geheel, zelfs reeds bij oppervlakkig doorlezen, in een bepaalde richting wijst, en zo bij-

---

[1]) l.c. 170.

voorbeeld het vermoeden doet rijzen: dit wordt iets met de machtstelling. Wij zeiden reeds: speciaal voor een goede leerling kan het probleem „lijn" krijgen voordat ook maar een enkele stap van de oplossing volledig gerealiseerd is. Voor de middelmatige leerlingen is, in het algemeen, juist de regressieve aanpak uitgangspunt van vermoedens (bij een niet geplaatst vraagstuk tenminste).

Laten wij nu in het midden of het vermoeden intuitief of na systematisch overleg ontstaan is. Van wiskundig standpunt kan de gissing juist, juist maar onhandig, niet onjuist maar lelijk, enz., of een. . . ver-gissing zijn. Als wij spreken over de goede aanleg voor Meetkunde van een leerling, dan denken wij, lijkt mij, in de eerste plaats aan de kwaliteit van zijn gissingen. Anders gezegd: Bij een bepaalde leerling is de relatief constante *trefzekerheid van zijn vermoedens* het belangrijkste kenmerk van zijn meetkundige aanleg.

Het komt mij voor dat de *sterkte van de vermoedens* nauw verband houdt met de karakterstructuur (zelfvertrouwen) van de leerling, en slechts indirect afhangt van zijn meetkundige aanleg. De sterkte namelijk, hangt samen met de aard van zijn ervaringen met het oplossen van vraagstukken (en dus ook met zijn aanleg). Als bijvoorbeeld een leerling vaak succes heeft met het oplossen van zijn vraagstukken, dan zal dit vermoedens-versterkend werken. Als men nagaat waardoor een onverwacht falen van een goede leerling veroorzaakt werd, dan zal vaak blijken dat sterke vermoedens hem in een verkeerde (of onhandige) richting dreven. Omgekeerd zal een reeks mislukte pogingen meestal de stuwkracht van de vermoedens verzwakken; succes is dan onwaarschijnlijk. Dan ontstaat een fatale cirkelgang die moeilijk te doorbreken is.

Gaat nu echter met een sterk (zwak) vermoeden steeds een grondig (vluchtig) onderzoek gepaard? In vele gevallen is dit zo, maar ongetwijfeld is dit verband meer gecompliceerd. Grondigheid kan zozeer tot de habitus van de leerling behoren dat elke mogelijkheid waarop hij zich richt nauwkeurig onderzocht wordt. Daartegenover kan een leerling overtuigd zijn dat hij op de goede weg is, maar de oplossing niet vinden omdat hij vluchtig *is*. Sterker nog: er zijn leerlingen die het meest presteren als zij niet al te zeker zijn van hun zaak; dan voelen zij de noodzakelijkheid van een bewijs. Zijn zij er echter van overtuigd op de goede weg te zijn, dan achten zij relaties, die wel degelijk bewezen moeten worden, evident (Stereometrie!).

In eerste instantie zijn grondigheid (vluchtigheid) kenmerken van de persoonlijke habitus. Een sterker vermoeden stimuleert de denkactiviteit meer; wordt dit vermoeden echter tot zekerheid, dan

ontbreekt de innerlijke behoefte aan verificatie. Er kan gehoorzaam aan de eisen van het vak voldaan worden, maar onnauwkeurigheden en andere kenmerken van haast treden veelvuldig op.

Nu kennen wij verder leerlingen, waarvan de goede prestaties minder uit de grote trefzekerheid van hun vermoedens voortkomen, dan wel uit het grote gemak waarmee zij van de ene op de andere mogelijkheid overstappen. Terwijl een zwakke leerling juist zwak kan zijn, omdat hij zich vastbijt in de eerste mogelijkheid die bij hem opkomt (Incidenteel kan hij dan wel een goede prestatie leveren.) Het ligt voor de hand dat wij in deze gevallen te doen hebben met *perseveratie* verschijnselen. Een sterke perseveratie maakt het moeilijk los te komen van een eenmaal ingeslagen weg, en een niet sterke perseveratie is in ieder geval een voorwaarde voor het bovengenoemde gemak van omschakelen. Niettegenstaande het grote aantal onderzoekingen behoort het begrip perseveratie echter tot de omstreden gebieden van de Psychologie. Waar hebben wij mee te maken: vasthoudendheid of gebrek aan soepelheid, niet willen — of niet kunnen — loslaten? „The belabored concept of involuntary perseveration was the psychologist's timid, half-hearted gesture toward a troublesome but inescapable problem in personality. The concept of persistence is far bolder, and in the long run should prove sounder. If so, it will take care, partially at least, of the thorny problems of „will power" whose inclusion in any psychological schedule of personality is as necessary as it is vexatious." [1]) De betekenis van het wilsleven in dit verband komt ook naar voren als wij het *verwerpen* van een middel nader beschouwen.

Als een vermoeden oorspronkelijk tamelijk sterk was, maar alle pogingen om het te benutten falen, dan staat in vele gevallen de onbruikbaarheid van het middel nog niet vast, zodat de stuwkracht van het vermoeden niet verminderd hoeft te zijn. Uiteindelijk vereist het verwerpen dan een vaak moeilijk wilsbesluit. Sterke perseveratie brengt dan het gevaar met zich mee, dat de verworpen middelen op pogingen in een andere richting nog een belemmerende nawerking uitoefenen. (vgl. IIIA).

Wij noemen nog enkele gevallen, waarbij het begrijpelijk is dat een bepaald middel niet gemakkelijk losgelaten wordt:

1) De onhandige, veel te moeilijke, oplossing, waarbij elke nieuwe phase de oplossing nader brengt, zodat geen sterk motief voor een andere keus aanwezig is.

2) Een nieuw middel belooft aanvankelijk succes, maakt een of

---

[1]) G. W. Allport, Personality, Constable, London (1949), p. 418.

meer stappen (regressief) mogelijk, maar is toch onbruikbaar.

3) Een vraagstuk lijkt op een bekend vraagstuk, de gelijkenis is echter slechts uiterlijk.

Wij bespraken in dit gedeelte de volgende bronnen van moeilijkheden:

a) De fatale cirkelgang: weinig succes — zwakke vermoedens — nog minder succes.

b) Karakterfactoren (vluchtigheid, besluiteloosheid).

c) De geringe stuwkracht van de evidentie-ervaring.

d) Niet los kunnen komen van een poging (sterke perseveratie).

In het algemeen zàl ik mij in dit artikel niet bezighouden met didactisch-paedagogische consequenties, maar wat het vierde punt betreft, wil ik toch het volgende opmerken: Het is mijn ervaring dat er onder de leerlingen, die met de hier genoemde moeilijkheid te kampen hebben, een niet gering aantal zijn, die wel een voldoend inzicht in de meetkunde bezitten, en ook tot voldoende prestaties gebracht kunnen worden. Hun te sterke perseveratie is niet te doorbreken door te zeggen: „Probeer eens wat anders." Mogelijk is het echter wel om deze perseveratie op een „hoger niveau" te brengen[1]; d.w.z. deze leerlingen zijn vaak in staat een systeem van aanpakmethoden (bijvoorbeeld systematische regressie) goed te gebruiken. Hierbij dient echter een accentverschuiving van hun doelstelling op te treden.

Hun doelstelling was eerst: *dit* vraagstuk op te lossen, hun doel moet worden: *dit* systeem van oplossigns-methoden op het vraagstuk toe te passen. De perseveratie van elke afzonderlijke poging zal, als het lukt, verminderen, maar het oplossingssysteem zelf wordt dan weer te star volgehouden.

III

Nu zullen wij verder aannemen dat een middelvermoeden aanleiding geeft tot een grondig onderzoek. Wij komen dan tot de moeilijkheden die betrekking hebben op het *benutten van een middel.* In de, op een bepaald middel gerichte, probleemsituatie wordt dan in de figuur naar een bepaalde relatie gezocht. Hierbij hangt veel af van het middel in kwestie zelf; wij willen echter eerst het normale aspect bespreken.

A. Het gebruik van de meeste middelen eist een structuur-

---

[1]) Vgl.: M. J. Langeveld, Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie, Wolters, Groningen (1937), 302.

verandering van de probleemsituatie. Wij noemen enkele typen van dergelijke veranderingen:

1) Een bepaald deel van de figuur moet als bekende meetkundige structuur herkend worden (bijv.: een gelijkbenige driehoek, een p.g.m., een afgesneden driehoek, twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde, enz.).

2) Verschillende delen van de figuur moeten als zelfstandige structuren gezien, en als zodanig met elkaar in relatie gebracht worden (congruentie, gelijkvormigheid).

3) Er moet een hulplijn getrokken worden die de gehele figuur (of een gedeelte) een ander aanzien geeft (een trapezium moet uiteenvallen in een p.g.m. en een driehoek, een nieuwe driehoek moet ontstaan, enz.).

4) Een bepaald deel van de figuur moet in een andere structuur gezien worden (een lijnstuk, hoek of boog als som of verschil van twee lijnstukken, hoeken of bogen).

Dit anders-zien is ongetwijfeld voor oefening vatbaar. Bepaalde typen structuurveranderingen zouden ook als (hulp)middelen geformuleerd kunnen worden. Menige docent zal bijvoorbeeld, naar aanleiding van vraagstukken over evenwijdige lijnen, de opmerking maken: „Als er twee evenwijdige lijnen in de figuur voorkomen, dan zijn de stellingen over overeenkomstige hoeken, enz., toepasbaar op elke lijn die niet met deze lijn evenwijdig is; dus eventueel na verlenging." En bij hoeken- en bogenvraagstukken: „Je ziet dus dat je vaak een boog zal moeten opvatten als som of verschil van enige andere bogen." Maar ook zonder uitdrukkelijke formulering maakt ervaring de structurele moeilijkheden lichter.

Bunt [1]) heeft erop gewezen dat bepaalde *belemmeringen* het aanbrengen van de nodige structuurveranderingen in de weg kunnen staan. Hij bespreekt de volgende typen:

a) De herkenning van een deel van de figuur als bekende figuur kan veel moeilijkheden opleveren, doordat deze figuur in het vraagstuk een *ongewone stand of vorm* heeft.

b) Bepaalde *„Gestalt"-eigenschappen* van de waarneming kunnen het moeilijk maken de figuur anders te zien (achtergrond, rand, symmetrie, bedekkingen).

c) Er kunnen *„functionnele bindingen"* optreden, waarvan de leerling zich moeilijk kan bevrijden. In het bijzonder behoren hiertoe

---

[1]) l.c., 177 e.v. (De formulering is hier enigszins gewijzigd).

gevallen waarin een „functie-verwisseling" nodig is, en die waarin de „verbreking van een zekere homogeniteit" vereist is [1]).

Speciaal wat de groep *c* betreft komt het mij voor, dat de terminologie nog onbevredigend is, terwijl bovendien nog heel wat experimenteren nodig zal zijn voor wij goed begrijpen wat hierbij plaats vindt.

Een element (deel) van een figuur verkrijgt zijn functie niet door slechts „deel te zijn van een geheel", maar door in dat geheel een „rol te spelen"; en het is de oplosser die de rollen uitdeelt! In Duncker's bekende voorbeeld [2]) moet aan hetzelfde voorwerp eerst de rol „boor" en dan de rol „haak" gegeven worden. *Functies ontstaan dus in de probleemsituatie.* Men kan bij een bepaald vraagstuk niet spreken van *de* functie van een bepaald element, maar slechts van de functie die in het algemeen door de oplossers aan dat element verleend wordt.

Een beter inzicht in het belangrijke verschijnsel „functionnele binding" vereist daarom een onderzoek naar het *ontstaan* van deze functies.

Het volgende voorbeeld kan misschien de richting aangeven waarin een dergelijk onderzoek zal moeten gaan.

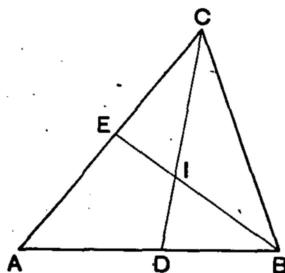


Fig. 6.

Wij vergelijken verschillende formuleringen van „hetzelfde" vraagstuk. Van driehoek ABC is gegeven: AB = 10, BC = 9, AC = 11.

1) Men trekt de bissectrice BE en de bissectrice CD van driehoek ABC en noemt hun snijpunt I. Bereken CI : ID.

2) Men trekt de bissectrices CD en BE en noemt hun snijpunt I...

3) Bereken de verhouding van de stukken waarin de bissectrice van hoek C verdeeld wordt door de bissectrice van hoek B.

---

[1]) Voor uitvoerige voorbeelden van deze belemmeringen verwijzen wij naar het artikel van Dr Bunt.

[2]) K. Duncker, Zur Psychologie des produktiven Denkens, Springer, Berlin (1935) Een korte beschrijving van deze proefnemingen vindt men bij Bunt, l.c. 180.

4) Men trekt de bissectrice CD. Als I het snijpunt is van CD met de bissectrice van hoek B bereken dan . . .

Bij deze formuleringen bestaat, maar in afnemende mate, het gevaar dat de bissectrice van hoek B functionneel gebonden wordt aan driehoek ABC. D.w.z. een leerling ziet niet dat hij de bissectrice-stelling op △ CBD moet toepassen, omdat BE als bissectrice van △ ABC optreedt. Bij (1) suggereren de formulering, de volgorde waarin de bissectrices getrokken worden (eerst ontstaat △ ABC met BE) en de structuur van de voltooide figuur deze functie van BE. Bij (2) echter ontstaat niet eerst de waarnemings-structuur △ ABC met bissectrice BE. De functionnele binding zal hier minder sterk zijn. Bij (3) is er veel kans dat het lijnstuk IE zelfs niet getrokken wordt, terwijl bij (4) zowel in de formulering als voor de waarneming BI bissectrice is van △ DBC.

Formulering, volgorde van opbouw en waarneming van de voltooide figuur (wel degelijk een actief proces) kunnen dus in de probleemsituatie reeds voor het „eigenlijke" denkwerk begint functies doen ontstaan.

Daarnaast dient opgemerkt te worden, dat ook het denkproces zelf functieverlenend kan werken. Zo brengt bij het eerste voorbeeld van dit artikel (fig. 1) het vermoeden congruentie met zich mee, dat aan ∠ P_1 en ∠ A_1 de rol van gelijkstandige elementen in nog niet gevonden driehoeken wordt toegekend. Als bij dit vraagstuk de figuur wordt waargenomen als driehoek met twee gelijkbenige driehoeken, dan verkrijgen daarmee de hoeken C_1 en C_3 de functie van tophoeken van gelijkbenige driehoeken. Dit kan een beletsel vormen om hen later te zien als gelijke delen van hoeken die het andere deel gemeen hebben. Vooral bij leerlingen met een sterke perseveratie zal de functieverlening, ontstaan bij een poging in verkeerde richting, vaak nog nawerken.

Wij wezen er reeds op dat de (gestructureerde) waarneming functieverlenend (of versterkend) kan werken. In verband met de onder (*b*) genoemde belemmeringen willen wij nu enkele resultaten van het psychologisch onderzoek over het waarnemen van figuren naar voren brengen. „Wie waarneemt, herkent, vergelijkt, rubriceert; er heeft een interpretatie plaats. Hieruit volgt, dat de waarneming ten nauwste verbonden is met ons ik, met ons denken, ons gevoel, onze fantasie, onze kijk op mensen en dingen, met onze instelling op onze omgeving. De waarneming geschiedt globaal d.w.z. we krijgen van het object een totaalbeeld, dat we daarna

analyseren."[1]) Verder bezit de waarneming, zoals bekend, „Gestalt"-karakter (complex, structuur, Gestalt, gestructureerde Gestalt). Bij het jonge kind zijn deze Gestalten nog „arm", diffuus, weinig geleed. „De ontwikkeling bestaat in een steeds voortschrijdende structurering en differentiering. De Gestalten, die worden waargenomen, krijgen een steeds fijnere geleding, ze worden meer en meer gevuld. Binnen de totaliteit krijgen de details steeds meer relief. De ontwikkeling loopt niet van het elementaire naar het complexe, maar juist omgekeerd van het diffuus-complexe naar het gedifferentieerde en geanalyseerde."[2])

De Gestaltpsychologie besteedt weinig aandacht aan de subjectieve factoren bij het tot stand komen van de waarneming. Woodworth[1]) beschouwt „perception as a kind of response" en legt veel nadruk op de subjectieve factor „set for the situation". De betekenis van de probleem-instelling kennen wij uit ervaring. De leerlingen zien bij de planimetrie hun figuren vlak- en bij de stereo ruimtelijk. En als men in de lagere klassen bij een figuur, die zich daartoe leent, (vermenigvuldiging van figuren) zegt: „bekijk deze figuur nu eens ruimtelijk", dan treedt bij de meeste leerlingen direct een andere instelling op, en zien zij de figuur met „diepte".

In welk opzicht kan nu de waarneming een belemmerende invloed op het oplossen uitoefenen? De waarneming brengt steeds een interpretatie van de figuur met zich mee. Doet deze interpretatie bepaalde elementen een rol spelen, waarvan de waarnemer-denker zich dan later moeilijk kan bevrijden? Hebben wij hier dus ook te maken met functionnele bindingen en is dus groep (*b*) slechts een ondergroep van goed (*c*)?

Bunt bespreekt beide groepen afzonderlijk, van de Gestaltverschijnselen noemt hij alleen de tegenstelling figuur-achtergrond en in ander verband het randverschijnsel, terwijl hij de moeilijkheden van het verbreken van de homogeniteit van de gegevens (die toch veelal ontstaan uit de voorkeur van de leerling voor symmetrische Gestalten) bespreekt bij de functionnele bindingen.

Het komt mij voor dat het verschil tussen beide groepen belemmeringen weliswaar niet groot is, terwijl ze bovendien vaak te gelijkertijd optreden, maar het lijkt mij toch belangrijk genoeg.

Bij de functionnele bindingen (*c*) spelen bepaalde elementen (of

---

1) L. C. T. Bigot, Prof. Dr Ph. Kohnstamm, B. G. Palland, Leerboek der Psychologie, Wolters, Groningen (1949, derde druk), 54.

2) Idem, 408. (Naar aanleiding van onderzoekingen van Koffka en Volkelt).

3) R. S. Woodworth, Experimental Psychology, Holt, New York (1948), 624.

deelstructuren) een rol in het *denken* over het probleem; deze belemmeringen hebben het karakter van een actieve tegenwerking. De Gestalt-verschijnselen (*b*) hebben meer het karakter van een passieve weerstand. Wordt echter over de waarneming verder nagedacht, dan kunnen de Gestalteigenschappen functies doen ontstaan, die weer moeilijkheden van het tpye (*c*) geven.

Het volgende voorbeeld kan dit duidelijk maken:

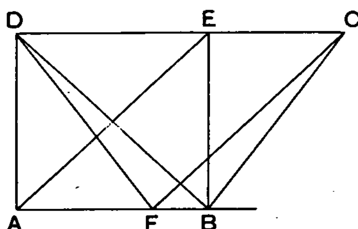


Fig. 7.

Geg.: AB // CD, AE // CF, AD // BE, BC = DF.

Te bew.: ∠ A = 90°.

Voor de oplossing van dit vraagstuk is het nodig dat de figuur op drie verschillende wijzen wordt opgevat (rechthoek, p.g.m., gelijkbenig trap.).

In eerste instantie zal de figuur globaal worden waargenomen (als „ding", rechthoekig trapezium met lijnen erin). Een nadere analyse structureert dan de waarneming (uiteenvallen in driehoeken).

Daarbij is het mogelijk dat de leerling de rechthoek ontdekt, zodat deze „naar voren" komt. *Het op de voorgrond treden van de rechthoek is een belemmering voor het zien van het p.g.m. en het gelijkbenig trapezium.* Denkend over het probleem zal de leering zijn waarneming moeten losmaken van de rechthoek; hierbij treden dan tevens functionele bindingen op: AE en BE worden eerst opgevat als diagonalen van een rechthoek en moeten later resp. gezien worden als zijde van een p.g.m. en als diagonaal van een gelijkbenig trapezium.[1])

Een „goede kijk op figuren" (men spreekt wel, maar ten onrechte,

---

[1]) Dit vraagstuk geeft een eenvoudig voorbeeld van „verborgen figuren". De onderzoekingen op dit gebied zijn voor een goed begrip van bepaalde moeilijkheden in de planimetrie van veel belang. Vgl.: A. Galli, A. Zama, Zeitschrift fur Psychologie (1931), **123**, 308—348. Voor verdere litt., vgl.: R. S. Woodworth, l.c. 638—643.

van een goed voorstellingsvermogen) betekent een sterke differentiatie, structurering en een grote variabiliteit van de figuur-waarneming. Geen of weinig "kijk" kan evenwel twee betekenissen hebben: (1) De waarneming van figuren is globaal, (nog) onvoldoend gedifferentieerd. (2) De waarneming is te star gestructureerd; de leerling kan niet loskomen van een bepaalde opvatting van de figuur (dus weer: sterke perseveratie).

Dit voert ons tot het belangwekkende probleem van de verhouding van waarnemen en denken bij het oplossen van vraagstukken.

Een intelligente leerling kan geen kijk hebben op meetkunde, terwijl hij op ander gebied tot moeilijke abstracties en scherpzinnig denken in staat is, en ook blijk kan geven van een weldoordachte en systematische probleemaanpak. Als een dergelijke leerling faalt bij ons eerste voorbeeld (fig. 1), dan zal hij falen bij de „vondst", d.w.z. het vermoeden congruentie zal wel bij hem rijzen, dit kan hij bedenken, maar het is mogelijk dat hij de congruente driehoeken zelf niet ziet. Het komt mij voor, dat de probleemsituatie voor hem dan uiteenvalt in twee niet, of nauwelijks, verbonden delen: de waarneming van de figuur en het denken over het probleem. De waarnemings-structuur is dan min of meer constant, zelfstandig en onafhankelijk van de denkarbeid.

Mannoury schrijft:[1] „Bij de meeste mensen treden de beide komplexen (het logiese en het fysiese onderkomplex) wel beurtelings maar nimmer tegelijkertijd in het volle bewustzijn, of anders gezegd: een levendige ruimtevoorstelling en een scherpe redenering sluiten elkander gewoonlijk uit. De (in wiskundige zin) gewone sterveling moet, wil hij een enkel stapje vooruitkomen op zijn moeilijk pad, telkens en telkens weer dezelfde brokstukken-wiskundige-taal en dezelfde-brokstukken-meetkundige-beeldvorming herhalen en herstellen, eer het hem lukt, die weerbarstige en ongelijksoortige geestesinhouden behoorlijk in de pas te doen marcheren."

Het „fysiese onderkomplex" (bewegings-herinneringen) is ongetwijfeld wat anders dan de gestructureerde waarneming. Men zal echter wel moeten bedenken dat wij ons hier beperken tot „bewijzen", en dat bij constructie opgaven bewegende voorstellingen (bewegelijke, beweegbare) de hoofdrol spelen. Deze zijn natuurlijk afhankelijk (maar hoe?) van physische herinneringen.

Wat de aard van de relaties betreft tussen beide delen van de probleemsituatie bij de, op meetkundig gebied, niet misdeelden

---

[1]) G. Mannoury, Woord en Gedachte, Noordhoff, Groningen (1931), 37.

spreekt Mannoury over „goede aandachtsverdeling" en „associaties tussen doelkomplexen van beide gebieden". Het eerste lijkt mij juist, het tweede maakt ons niet veel wijzer. Het komt mij voor, en speciaal bij de stereometrie is dit bij bepaalde leerlingen duidelijk merkbaar, dat beide delen de „pas" kunnen aangeven. Er zijn leerlingen bij wie het „zien" voorafgaat en het bewijs als controlemiddel volgt, terwijl omgekeerd door andere leerlingen de figuur denkend wordt opgebouwd en voltooid, waarbij de ruimtelijke relaties eerst ingezien worden na, of tijdens, het bewijzen.

Men dient wel te beseffen dat de besproken belemmeringen voor een wiskundige vaak moeilijk te zien zijn. Zijn mathematische aanleg houdt juist in dat hij niet meer in de opgave ziet dan er in zit. De aanvankelijke probleemsituatie is bij hem „open", de lijn die hij in het vraagstuk vermoedt is minder „versierd" met functieverleningen, en als hij toch aan bepaalde elementen reeds een rol heeft toegedacht, of de figuur op een bepaalde manier heeft opgevat, dan is hij beter in staat zich hiervan los te maken, te abstraheren van, voor het vraagstuk zelf, toevallige momenten.

Maar toch zou men bij het doorbladeren van de leerboeken haast gaan geloven dat voor de schrijvers bijvoorbeeld een horizontale „basis", tot de inhoud van het begrip p.g.m. behoort. Aan de onder (*a*) genoemde bron van moeilijkheden zijn dan ook de leerboeken voor een groot deel schuldig. Het misverstand schijnt te bestaan, dat een meetkundig begrip voldoende aangebracht wordt door een definitie te laten leren en een paar figuren te tonen. De begrippen worden dan te rijk aan inhoud en te arm aan omvang. Hoeveel leerlingen zijn er niet voor wie tot de inhoud van het begrip trapezium de gelijksoortigheid van de basishoeken behoort! En wij laten driehoeken construeren als gegeven zijn: *de* basis, *de* tophoek en *de* hoogte.[1]) Maar natuurlijk: het is de taak van de docent om de, door het leerboek gewekte, misverstanden op te ruimen . . . en zo moeilijk is dat in deze gevallen gelukkig niet.

We hebben tamelijk uitvoerig uitgewijd over het normale aspect bij het benutten van een middel; namelijk het zien hoe, en waar, dit middel gebruikt kan worden. We hebben daarbij enkele groepen belemmeringen genoemd die het omstructureren in de weg kunnen staan, en zijn naar aanleiding daarvan wat dieper ingegaan op enkele kenmerken van het meetkundig denken. Wij stelden ons daarbij op

---

[1]) Vgl.: L. N. H. Bunt, l.c., 177, 178; G. Mannoury, l.c. 27.

het standpunt dat een relatie gezocht werd in een regressief gerichte probleemsituatie.

Het zal duidelijk zijn, dat in vele gevallen door een tijdig overgaan op progressieve richting een hindernis makkelijker genomen kan worden. Kenmerkend voor al deze moeilijkheden was: „het niet zien", en een zekere verstarring van de probleemsituatie. Elke gefundeerde richtingswisseling die steeds een andere aandachtsverdeling omvat, kan de situatie in beweging brengen.

B. Er treden bij het benutten van een middel ook moeilijkheden op, die typerend zijn voor juist dat middel. Hier doelen we niet op het feit dat bepaalde typen structuurveranderingen behoren bij bepaalde middelen, maar op een ander verschijnsel, dat wij aan de hand van enkele voorbeelden zullen uiteenzetten.

Voorbeeld 1:

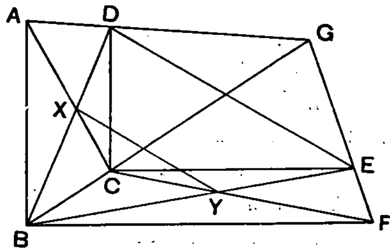


Fig. 8.

Als in figuur 8 gegeven is: AB // DC en BF // CE, en bewezen moet worden XY // DE, dan staat één ding vast: het gaat hier om evenredigheden. Middelzoekend komen er dan drie evenredigheden in aanmerking. De leerling heeft dan, ten eerste, in te zien dat geen van deze evenredigheden direct uit de gegevens volgt, en zich, ten tweede, te herinneren dat elke gelijkheid, en dus ook een evenredigheid, vaak bewezen wordt met behulp van een keten van gelijkheden. En als hij nu zo verstandig is de mogelijkheid BY : YE = . . . : . . . = . . . = BX : XD te gaan onderzoeken, dan moet hij een middel zoeken voor een slechts ten dele bekend doel. Hier is het noodzakelijk, dat hij zich afvraagt: „Welke evenredigheid, waarin BY : YE voorkomt, volgt uit de gegevens?" Hij moet zich dus niet zonder meer afvragen: „Wat volgt uit de gegevens?", en bijvoorbeeld gelijke hoeken en betrekkingen tussen hoeken gaan bekijken, maar zijn progressieve instelling moet op het middel (evenredigheden) en zelfs op het „halve doel" gericht zijn.

Wij zullen dit *gebonden progressie* noemen.

Voorbeeld 2:

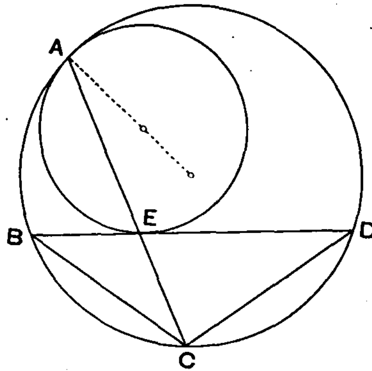


Fig. 9.

Geg.: zie figuur. Te bew: BC = CD.

1) Dit is duidelijk een hoeken- en bogenvraagstuk; dus te bewijzen: boog BC = boog CD (regressief).

2) Hoe kan ik het raken van de cirkels en het feit dat BD raaklijn is, gebruiken *bij dit hoeken en bogen vraagstuk* (gebonden progressief). (Geen stralen naar de raakpunten!)

Moet men bewijzen dat A, B, C en D op een cirkel liggen en rijst het vermoeden: „□ ABCD is een koordenvierhoek als twee overstaande hoeken samen 180° zijn", dan komen slechts twee mogelijkheden voor verder (regr.) onderzoek in aanmerking. Terwijl het vermoeden: „met de omgekeerde machtstelling", (in principe) drie wegen opent. Verder biedt een evenredigheid twee mogelijkheden voor eventueel bruikbare gelijkvormige driehoeken. Onderzoekt men echter of de gelijkheid van twee lijnstukken bewezen kan worden doordat ze hetzelfde deel zijn van een derde lijnstuk, dan komt in principe nog elk ander lijnstuk van de figuur voor vergelijking in aanmerking.

Het aantal manieren waarop een middel van regressief standpunt benut kan worden is dus zeer verschillend. Meerduidigheid van het middel maakt echter gebonden progressie misschien wel wenselijk, maar nog niet noodzakelijk. Bij voorbeeld 1 is dit echter wel het geval. Dit middel kan alleen goed functionneren bij een gebonden progressieve instelling. Hetzelfde geldt voor bewijzen met hoeken en bogen en voor vele gelijkheden (of betrekkingen) van hoeken. Een systematisch onderzoek van de belangrijkste middelen naar dit gezichtspunt lijkt mij niet onmogelijk.

In het voorgaande hebben we gepoogd een overzicht te geven van de belangrijkste typen moeilijkheden die bij regressieve aanpak optreden. Wij hebben gezien, dat het, om een moeilijkheid te overwinnen, meestal wenselijk, en ook vaak noodzakelijk, is over te gaan op een progressieve instelling.

De vraag rijst nu in hoeverre een progressief uitgangspunt nieuwe gezichtspunten opent. In plaats van systematisch afwerken van rijtjes middelen zou men kunnen pogen uit systematisch gegroepeerde gegevens en impliciet gegeven betrekkingen gevolgtrekkingen te maken.

Zelfs bij eenvoudige vraagstukken is in het algemeen het aantal relaties te groot. Slechts als het vraagstuk reeds een zekere lijn vertoont is dit mogelijk. Bij berekeningen van lijnstukken is reeds het feit, dat de lengte van een lijnstuk gevraagd is, in eenvoudige gevallen voldoende om bruikbare conclusies uit de gegevens te maken. De leerling moet zich dan afvragen: „Welk lijnstuk kan ik met behulp van de gegevens het eerste berekenen, enz.'" (gebonden progr.) Ook bij de geplaatste, of makkelijk plaatsbare, vraagstukken is dit het geval. Bij voorbeeld 1 van IIIB is het direct duidelijk, dat evenredigheden gebruikt moeten worden, maar een aanvankelijk regressieve instelling maakt een keus uit die evenredigheden veel eenvoudiger. Conclusies trekken is dus alleen zinvol mogelijk in een gebonden progressieve probleemsituatie, waarbij de binding echter niet uit een middelzoekende vraagstelling gerezen hoeft te zijn. Ook hier is een wisseling van gezichtspunt bij moeilijkheden wenselijk.

Er zijn gelukkig vele docenten, die, mede onder invloed van de denkpsychologie, het leren van een bewuste probleem-aanpak als een belangrijke didactische opgave beschouwen. Dat betekent niet alleen dat de leerlingen tot goede werkgewoonten (netheid, overzichtelijkheid, goede figuren, enz.) gebracht moeten worden, maar ook dat zij moeten leren zichzelf systematisch vragen te stellen: naar betekenissen, naar middelen en naar gevolgen, waarbij het van het grootste gewicht is dat deze vragen aangepast zijn aan de tijdens het denkproces steeds veranderende situatie. In het bijzonder volgt uit het voorgaande hoe belangrijk een wisseling van regressieve naar progressieve instelling (en omgekeerd) is.

De wenselijkheid van een bewuste probleem-aanpak wordt tot noodzakelijkheid als men de eis stelt, dat de leerlingen, als resultaat van het onderwijs in de meetkunde, ook gemengde vraagstukken kunnen oplossen.

Het is mij niet bekend hoeveel docenten, als de meetkunde „klaar"

is, toekomen aan herhalingen. De herhalingen in de leerboeken zijn hiertoe ongeschikt. Een herhaling dient een reorganisatie van het behandelde te zijn [1]) en voor de vlakke meetkunde is een systematisch overzicht van de belangrijkste middelen, lijkt mij, daartoe het meest bruikbare uitgangspunt [2]).

In dit artikel konden slechts die moeilijkheden ter sprake komen (en dan nog onder de in de inleiding genoemde beperkingen), die verband houden met de genoemde aanpak. Bijvoorbeeld zijn hier niet besproken:

1) Moeilijkheden die voortvloeien uit onvoldoende kennis of begrip van stellingen en andere middelen.

2) Moeilijkheden die kunnen optreden bij de omzetting van het in woorden geformuleerde probleem in een goede figuur.

3) De moeilijkheden en misverstanden die blijken uit foute bewijzen, waarbij wel onderscheid gemaakt moet worden tussen: (1) onnauwkeurige bewijzen; (2) bewijzen waarvan de leerling zelf wel weet dat ze niet in orde zijn (ze zijn dan het resultaat van „wishful thinking", en zijn meestal opgeschreven in de hoop dat er toch nog wel iets van goed zal zijn); (3) onjuiste bewijzen, waarvan de leerling meent dat ze goed zijn.

Van volledigheid kan bij dit artikel, zelfs binnen de gestelde grenzen, geen sprake zijn. Zo bleven ook de relaties tussen de verschillende typen moeilijkheden onbesproken. Het scheppen van enige orde op dit chaotisch gebied was slechts het doelwit. Persoonlijk ben ik overtuigd dat alleen op basis van een grondig onderzoek van de moeilijkheden, die onze leerlingen bij hun werk moeten overwinnen, een vruchtbare discussie over zuiver didactische problemen mogelijk is. Zonder deze basis heeft een dergelijke discussie slechts de waarde van een uitwisseling van ervaringen, waarvan ik het belang, speciaal de stimulerende invloed, zeker niet zal ontkennen. Maar veel overtuigingskracht heeft dan een bewering niet; de motivering moet volstaan met verwijzingen naar „goede resultaten", „grote belangstelling", enz.

Voor een dergelijk onderzoek (en dan experimenteel) is echter een voorlopige beschrijvingsterminologie nodig. In dit artikel is gepoogd hiertoe een bijdrage te leveren.

---

[1]) Vgl.: J. L. Mursell, Succesful Teaching, McGraw-Hill, New York (1946), 253; F. A. Butler, The improvement of teaching in secondary schools, The University of Chicago Press (1939), 336—344.

[2]) Op deze grondslag heeft P. E. Lepoeter een serie herhalingsvraagstukken samengesteld. (Verkrijgbaar aan het Rijnlands Lyceum).

VAL- EN WORPBEWEGING

door

A. J. Staring

Het artikel van wijlen Dr. H. J. E. Beth, in Euclides 27, IV verschenen, geeft mij aanleiding tot enkele opmerkingen. Zoals alles, wat Dr Beth voor het onderwijs schreef, noopt zijn beschouwing tot overdenking en het zich rekenschap geven van wat vaak, uit gewoonte, als vanzelfsprekend werd aangenomen. Wij moeten er in berusten dat geen boeiende, pittige beschouwingen van zijn hand meer zullen verschijnen, maar zijn publicaties zullen nog lang voor de leraren in de exacte vakken hun waarde behouden.

In het genoemde artikel wordt eerst, in § 4, de wenselijkheid naar voren gebracht om de scheve worpbeweging pas aan de orde te stellen nádat een stel axioma's aan de dynamica ten grondslag is gelegd. In § 5 gaf de schrijver de weg aan, te volgen door hen, die de worpbeweging onmiddellijk na de kinematica willen behandelen. Dit moet dan geschieden door uit te gaan van het ervaringsfeit, dat de versnelling van een stoffelijk punt bij een vrije beweging in de omgeving van de aarde, onafhankelijk is van de bewegingstoestand van het punt. De schrijver voelde het als een bezwaar, dat men dan als het ware voor elk nieuw probleem zijn toevlucht zou moeten nemen tot een nieuw ervaringsfeit of een nieuw axioma (het lijkt mij beter in dit verband, d.w.z. ter verklaring van een verschijnsel in de physische wereld, te spreken van: hypothese. Mechanica is geen zuivere wiskunde!).

Uit een oogpunt van onderwijs beschouwd, kan ik dit bezwaar niet delen. Ik acht het namelijk ongewenst om met de dynamica te beginnen, alvorens de leerlingen voldoende hebben leren *werken* met de begrippen snelheid en versnelling, en vertrouwd zijn geraakt met de voorstelling van die grootheden door vectoren. Het is noodzakelijk om na de theorie (waartoe ook behoort: de beschrijving van de beweging van een punt door middel van de bewegingen der projecties op een stel coördinaat-assen) toepassingen te laten maken. Veel oefening blijkt nodig te zijn, en gering is het aantal bewegingen, met behulp waarvan de leerlingen zich in het bijzonder het moeilijke begrip: versnelling, eigen kunnen maken. Deze bewegingen zijn:

1. Eenparige, en eenparig veranderlijke beweging, in het bijzonder die langs rechte lijn en cirkel; vrije val en verticale worp;
2. Scheve worpbeweging;
3. Harmonische beweging langs een rechte lijn (en eventueel die langs een ellips).

Juist No. 2 geeft de beste oefenstof. Het lijkt mij niet geschikt om deze oefeningen nog ingewikkelder te maken, door er zo spoedig mogelijk kracht en massa bij te halen. Ieder weet natuurlijk wel, dat bij de val- en worpbeweging de zwaartekracht een rol speelt, maar dáárom is het nog niet nodig om direct het verband tussen kracht en versnelling op de voorgrond te plaatsen. Ook de harmonische beweging kan men demonsteren en er de eigenschappen van afleiden zonder over kracht te spreken.

Bij de dynamische behandeling van de worpbeweging neemt men als uitgangspunt de hypothese, dat *gewicht en massa* van een lichaam niet van de beweging afhangen; bij de kinematische behandeling zal men uitgaan van de hypothese, dat de *versnelling* niet afhangt van de beweging, en men moet eigenlijk, zoals Dr Beth in § 1 van zijn beschouwing ook opmerkte, door waarneming (metingen) en inductie deze hypothese aan de feiten toetsen. Het komt mij voor dat dit in principe óók nodig is als men de behandeling dynamisch opzet. Maar zal die toetsing dan wel iets anders kunnen zijn dan, zo mogelijk, vast te stellen dat de *versnelling* constant is in richting en grootte? In dit opzicht zie ik geen verschil tussen beide behandelingswijzen.

Nu is meten zeker héél wat moeilijker dan postuleren in navolging van een grote voorganger! vooral bij de zo snel verlopende val- en worp-beweging. Het nauwkeurig onderzoeken van die bewegingen vereist alsnog een tamelijk ingewikkelde apparatuur. Er bestaat één eenvoudige schoolproef, die met voldoende overtuigingskracht één belangrijk feit aantoont: de verticale projectie van een horizontaal weggeworpen kogel heeft precies dezelfde beweging als een, van dezelfde hoogte uit, recht naar beneden vallende kogel. Aannemend dat men met voldoende nauwkeurigheid door metingen kan bepalen dat de valbeweging een eenparig versnelde is (ik denk aan een valtoestel van Morin), dan volgt uit de genoemde proef dat de verticale projectie van de versnellingsvector van een horizontaal weggeworpen stoffelijk punt constant is. Uit de vorm van de kogelbaan moet men dan afleiden dat de horizontale projectie van de versnellingsvector nul is. Men is geneigd daartoe de weg van Galilei

te bewandelen, nl. te werken met val- en worpbeweging op een glad hellend vlak. Daarop kan men de baan van het horizontaal weggeworpen kogeltje zich geschikt laten aftekenen, en dan met alleszins bevredigende nauwkeurigheid aantonen dat deze een stuk van een parabool is, met de as volgens een lijn van grootste helling. Maar dit resultaat verifieert dan een tamelijk ingewikkeld samenstel van feiten, waar een stuk dynamica achter staat.

Dus tòch eerst de dynamica inleiden, wat neerkomt op alléén postuleren? Naar mijn smaak niet. Maar het is zéér gewenst om een nauwkeurige, en toch in principe en in uitvoering eenvoudige, zo direct mogelijke, methode uit te werken voor het bepalen van de aard van de val- en de worpbeweging.

Hoewel men bij het onderwijs in een tak van wetenschap gelukkig niet gebonden is om de historische ontwikkeling ervan te volgen, kan het toch geen kwaad om voor ogen te houden dat Newton's dynamica eerst kon ontstaan ná de kinematica van vallende en weggeworpen voorwerpen, en van hemellichamen.

Ten slotte: de worpbeweging „met tegenwind" kan natuurlijk alleen dynamisch behandeld worden. Voor het onderwijs is het allerminst een bezwaar dat dit niet tegelijk met de „worpbeweging zonder meer" afgedaan wordt. Dit geeft gelegenheid het vroeger geleerde te repeteren en aan te vullen.

DE VLIEGENDE SCHOTEL.

Een hoofdstuk uit: „Ruimteland, een roman van vele afmetingen", geschreven door Een Kubus.

(met beleefde excuses aan een Vierkant[1])

... Zodra het geluid van het „opgepast" mijner vertrekkende vrouw was weggestorven, sloeg ik de motor van het vliegtuig aan en steeg ik op met het doel, van nabij een blik te slaan op de vliegende schotel. Toen ik hem dicht genoeg genaderd was, deed zijn voorkomen mij stom staan van verbazing en vergat ik bijna te sturen. Zonder de minste kentekenen van hoekigheid veranderde hij niettemin ieder ogenblik met zulke afwisselingen van grootte en helderheid, als bijna niet mogelijk waren van enig Lichaam, dat ik ooit had leren kennen. De gedachte vloog mij door het hoofd, dat ik voor mij zou kunnen hebben een moorddadige oorlogsmachine van een of andere vreemde mogendheid of wellicht van een andere planeet. Wanhopig van angst vloog ik zonder complimenten op hem af met een: „U moet mij veroorloven, Mijnheer..." en bekeek hem van alle kanten.

DE SCHOTEL: Hebt ge mij nu eindelijk genoeg bekeken? Hebt ge nog niet genoeg kennis?

IK: Waar komt U vandaan?

SCH: Van de ruimte, Mijnheer, van waar anders?

IK: Met Uw verlof, maar is U niet reeds in de ruimte?

SCH: Bah, wat weet gij van de Ruimte? Geef eens een bepaling van de Ruimte.

IK: Ruimte is lengte, breedte en hoogte in 't oneindige verlengd.

SCH: Ge denkt, dat Ruimte slechts drie afmetingen heeft, maar ik ben gekomen, om U een vierde te openbaren.

IK: Wilt U mij die vierde richting aanwijzen?

SCH: Uit die richting ben ik gekomen. Gij kunt die richting niet zien, omdat gij daar geen oog voor hebt.

IK: Maar wat bent gij dan?

SCH: Ik ben een stralenbundel. Wat U ziet, is mijn projectie op Uw drie-dimensionale ruimte.

IK: Maar een projectie is toch een vlak?

SCH: Volstrekt niet. U noemt mij toch zelf een schotel? En die heeft toch drie afmetingen en kan zich wenden en keren!

---

[1]) Dit stukje is een variant op § 16 en § 17 uit: Platland, een roman van vele afmetingen, door Een Vierkant. (uit het Engels, 4e dr., 1920. J. Emmering, Amsterdam).

IK: Inderdaad, maar ik zie de stralenbundel zelf niet, zoals bij ons een zoeklicht bijv.

SCH: Mijn stralenbundel bevindt zich in de Ruimte, de Vierdimensionale Ruimte dan.

IK: Hoe komt het, dat men U vroeger nooit zag?

SCH: U hebt mij zelf opgeroepen?

IK: Wat zegt U?

SCH: Ja, zeker; weet gij dan niet, dat gij met Uw atoomproeven vier-dimensionale processen voortbrengt? Gij hebt mij opgewekt, ik dook onder in mijn Ruimte en nu ben ik weer terug.

IK: Monster, al ben je een tovenaar of een duivel, ik wil Uw spotternijen niet langer verdragen. Jij of ik moet sterven!"

En met deze woorden viel ik op hem aan. Het was vergeefse moeite. Ik bracht mijn vliegtuig in hevige botsing met de vreemdeling, maar ik kon voelen, dat hij langzaam en ongehinderd aan mijn aanraking ontglipte, noch rechts, noch links, noch omhoog, noch omlaag uitweek, maar op een geheimzinnige wijze de wereld uitging en in het niet verdween. Weldra was er een leegte, maar toch voelde ik steeds zijn aanwezigheid . . .

F. HENNEMAN.

EEN NIEUW EXAMEN IN DE STATISTIEK.

Gedurende de laatste jaren valt er allerwege een sterk stijgende belangstelling voor de toepassing van de statistiek waar te nemen.

Steeds meer wint de overtuiging veld, dat dit hulpmiddel van grote betekenis is bij de oplossing van de ingewikkelde vraagstukken, die zich zowel op technisch als administratief-economisch gebied in het bedrijfsleven voordoen als ook bij de wetenschappelijke onderzoekingen, bijvoorbeeld in de medicijnen en de biologie. Sterker nog, veelal blijkt, dat een wetenschappelijk verantwoorde oplossing zonder dit hulpmiddel niet mogelijk is, terwijl daar, waar dit wel het geval is, de toepassing toch met een aanzienlijke verhoging van de doeltreffendheid gepaard gaat.

Het is dan ook niet te verwonderen, dat de vraag naar geschoolde statistici toeneemt. Deze vraag richt zich zowel op personen, die zodanig gekwalificeerd zijn, dat zij in staat zijn zelfstandig gecompliceerde vraagstukken op te lossen als ook op personen, wier kennis beperkt blijft tot een grondige beheersing van de talrijke technische hulpmiddelen, waarover de statistiek beschikt.

De eerstgenoemde categorie, die uiteraard op een hoger niveau

dient te staan dan de tweede; is minder omvangrijk dan deze en bovendien wordt, althans ten dele, in de behoefte aan personen uit deze categorie voorzien door het onderwijs in de statistiek aan de verschillende instellingen van hoger onderwijs hier te lande.

Hoewel naar het oordeel van onze Vereniging ook voor deze categorie nog een aantal wensen te vervullen zijn — wij denken hier met name aan een mogelijkheid tot het afleggen van een proeve van bekwaamheid op dit gebied voor niet-academisch gevormden — is het toch een eerste eis, dat het aanbod van personen uit de tweede categorie wordt gestimuleerd. Een examen voor dezen bestond in ons land niet.

Na een lange tijd van voorbereiding is door de Vereniging voor Statistiek (gevestigd te 's-Gravenhage; secretariaat: Postbus 4027 - Rijswijk (Z.H.)) besloten tot het instellen van een examen „statistisch analyst", dat voor het eerst in December 1952 en vervolgens ieder jaar zal worden afgenomen.

Het examen opent de mogelijkheid een kwalificatie toe te kennen aan die personen, die in de praktijk van hun werk gebruik maken van statistische analyse en wier kennis beperkt blijft tot een grondige beheersing van de talrijke technische hulpmiddelen, waarover de statistiek beschikt. Het daarbij te verlenen diploma houdt dus niet in dat de geslaagden in staat zijn zelfstandig gecompliceerde vraagstukken van statistische aard op te lossen.

Voor deze laatste groep, wier kennis en ontwikkeling te vergelijken zijn met die van academisch gevormden, zal wellicht over enkele jaren een examen „statisticus" worden ingesteld. Voor diegenen die in de toekomst deze kwalificatie zouden willen verwerven, moet het examen „statistisch analyst" als een eerste stap worden gezien.

Met het examen wordt beoogd, geschikte candidaten een bewijs van bekwaamheid te verschaffen dat door het bedrijfsleven, wetenschappelijke instituten en andere werkgevers ook als zodanig wordt beschouwd. Bovendien wordt gehoopt dat door de mogelijkheid tot het verkrijgen van een dergelijk certificaat de belangstelling voor de statistische studie zal worden vergroot en het ontstaan van goede opleidingsmogelijkheden zal worden bevorderd.

Het examen is gericht op een bepaald toepassingsgebied. Het bestaat uit twee delen. In het eerste deel, dat voor de verschillende toepassingsgebieden gelijk is, wordt de algemene statistische theorie geëxamineerd. Het tweede deel omvat een aantal onderwerpen die in het bijzonder van belang zijn voor een bepaald toepassingsgebied. Bij dit tweede deel zal in het bijzonder worden gelet op de ervaring

die de candidaat op het betreffende toepassingsgebied heeft.

Eventueel bestaat de mogelijkheid voorlopig alleen examen te doen in het eerste deel, waarbij dan echter geen diploma, doch slechts een verklaring wordt uitgereikt.

Voor de eerste maal zal slechts worden geëxamineerd over het industriële toepassingsgebied. De namen der leden van de examencommissie 1952 zullen in Statistisch Nieuws worden bekendgemaakt.

Er is een uitvoerig examenprogramma verschenen waarin het examenreglement is opgenomen, alsmede de algemene exameneisen, de gespecificeerde examenstof, literatuurlijsten, literatuurverwijzingen voor de examenstof en een model-examen, alles zowel voor het algemene gedeelte als voor het industriële toepassingsgebied.

Voor belangstellenden is dit examenprogramma (23 blz.) verkrijgbaar door overmaking van *f* 1,— op girorekening no. 202091 van de Vereniging voor Statistiek te Rijswijk (Z.H.), over vermelding van „Examenprogramma".

Hieronder volgt nog, overgenomen uit dit Examenprogramma, het Examenreglement en de Exameneisen.

EXAMENREGLEMENT.

Voor het verkrijgen van het diploma „Statistisch Analyst", als vastgesteld dd 24 Juni 1952 door het bestuur van de Vereniging voor Statistiek.

ORGANISATIE VAN HET EXAMEN.

1. Voor deelneming aan het examen is het bezit van een bepaald diploma of een bepaalde vooropleiding niet vereist.
2. Candidaten kunnen zich tot het examen uitsluitend aanmelden door het invullen en vóór de gestelde datum inleveren van een aanmeldingsformulier, dat hiertoe door de secretaris van de Vereniging voor Statistiek wordt beschikbaar gesteld.
3. De kosten van deelneming aan het eerste deel van het examen bedragen *f* 35.— en voor het tweede deel: *f* 25.—.
   Indien beide delen aaneensluitend worden afgelegd bedragen de totale kosten *f* 50.—.
4. Het examen bestaat uit twee delen, te weten:
   Eerste deel: algemene statistische theorie en toepassing daarvan
   Tweede deel: statistische methoden ten dienste van een bepaald toepassingsgebied.
   De beide delen kunnen aaneensluitend of in verschillende jaren worden afgelegd. In het laatste geval zullen slechts die candidaten tot het tweede deel worden toegelaten, die het eerste deel met goed gevolg hebben afgelegd.
5. Candidaten dienen bij hun aanmelding voor het tweede deel van het examen op te geven in welk toepassingsgebied zij wensen te worden geëxamineerd. Het bestuur van de Vereniging voor Statistiek stelt ten minste een half jaar voor ieder examen vast uit welke toepassingsgebieden gekozen kan worden.

6. Beide delen van het examen worden schriftelijk en mondeling afgenomen.
7. Een mondeling examen wordt niet afgenomen indien het schriftelijk werk de examencommissie in ongunstige zin voldoende uitsluitsel geeft over de kwaliteiten van de candidaat.
8. Het schriftelijk examen wordt voor beide delen als regel eenmaal per jaar omstreeks December afgenomen. Het mondeling examen volgt niet eerder dan één maand en niet later dan drie maanden na het schriftelijk deel.
   Plaats en tijd van het schriftelijk examen worden minstens drie maanden van te voren op passende wijze bekend gemaakt.
9. De examencommissie wordt voor ieder examen benoemd door het bestuur van de Vereniging voor Statistiek.
10. De examencommissie stelt de opgaven samen in overeenstemming met de exameneisen en de examenstof.
11. Candidaten moeten zich op het examen kunnen legitimeren met een geldig paspoort, bewijs van Nederlanderschap (België: Eenzelvigheidskaart), een postidentiteitsbewijs of een ander geldig identiteitsbewijs.
12. Ten minste een maand vóór elk examen wordt een mededeling toegezonden aan hen, die zich voor het betreffende examen hebben aangemeld. Hierin staat onder meer aangegeven welke boeken, tafels en andere hulpmiddelen op het examen moeten of mogen worden gebruikt.
13. Aan de candidaten die, naar het oordeel van de examencommissie het tweede deel van het examen met vrucht hebben afgelegd, wordt een *diploma* uitgereikt. Op dit diploma staat het toepassingsgebied vermeld waarover werd geëxamineerd.
14. Aan candidaten, die het eerste deel van het examen met goed gevolg hebben afgelegd, wordt een *verklaring* uitgereikt waaruit dit blijkt. Deze verklaring zal niet worden uitgereikt aan hen, die op grond van artikel 13 een diploma ontvangen.
15. De beslissing van de examencommissie is bindend.
16. Wijzigingen in het examenprogramma worden niet eerder van kracht dan een jaar na bekendmaking.
17. In alle bijzonderheden waarin dit reglement niet voorziet, beslist het Dagelijks Bestuur van de Vereniging voor Statistiek.

EXAMENEISEN.

Van de candidaten wordt verlangd dat zij:

a. in staat zijn de meest bekende statistische technieken op waarnemingsmateriaal toe te passen;
b. de belangrijkste voorwaarden kennen, waaronder deze technieken mogen worden toegepast;
c. in eenvoudige practijk-vraagstukken geschikte statistische technieken weten te kiezen;
d. de meest voorkomende statistische formules en definities uit het hoofd kennen;
e. de algebra volgens het programma van Gymnasium-B of H.B.S.-B vlot kunnen hanteren;
f. enige kennis van differentiaal- en integraalrekening bezitten en vertrouwd zijn met de begrippen permutaties, variaties en combinaties, natuurlijke logarithmen faculteiten en met het binomium van Newton,;
g. de beginselen van de waarschijnlijkheidsrekening kennen en begrip hebben van het verband tussen waarschijnlijkheidsrekening en statistiek;

h. in staat zijn gedachten en redeneringen in behoorlijke formuleringen en symbolen uit te drukken.

Candidaten wordt er op gewezen, dat het in de regel niet mogelijk zal zijn het examen met goed gevolg af te leggen indien zij niet door practisch werk ervaring hebben opgedaan.

BOEKBESPREKING

Louis Couffignal, Les machines à penser. Paris, Les Editions de Minuit, 1952. — 160 p.

Ik weet niet, of het nodig is, de auteur van dit boekje aan de lezer voor te stellen. L. Couffignal is in de wereld van de rekenmachines door zijn practisch en theoretisch werk een bekende figuur. Onder zijn leiding wordt in het Institut Blaise Pascal bij Parijs een electronische rekenmachine gebouwd, waarover helaas nog geen gegevens bekend zijn. Reeds in 1936 heeft hij voorgesteld, het tweetallig stelsel te gebruiken. Ik begrijp best, dat Couffignal op zijn prioriteit gesteld is. Ik vind echter, dat hij te weinig eer geeft aan de grote schare hunner, die even vroeg even onbepaalde plannen ontvouwden (b.v. in hetzelfde deel der Comptes Rendus: R. Valtat en Malassis, waarvan de eerste sinds 1931 een octrooi op een tweetallige rekenmachine heeft), maar vooral aan Shannon, die twee jaar later op hetzelfde idee kwam, maar het dan ook in alle bijzonderheden uitwerkte en die met zijn diepgaande theorie de ontwikkeling der moderne rekenmachines beslissend beïnvloedde.

Couffignal legt in zijn boekje het accent op hetgeen men in de wandeling de philosophie van de rekenmachines noemt. Technische bijzonderheden zijn niet zeer talrijk. Rekenmechanismen worden niet uiteengezet, behalve dat van de machine van Pascal van 1642 en dat van de Burrough van 1889. De verschillende typen van geheugens worden slechts opgesomd, en het probleem van het bestuur van een automatische rekenmachine komt in het boek — als ik me niet vergis — niet ter sprake. Het is wel jammer, dat men ook weinig verneemt over de machine in het Institut Blaise Pascal.

Tafelrekenmachines worden haast niet behandeld. Wel wordt vrij veel aandacht geschonken aan het practisch gebruik van ponskaartenmachines. De naam van hun uitvinder — Hollerith — wordt echter niet genoemd. Babbage, die door zijn mislukte grootse project beroemd is geworden, komt er wel voor. Het kapitaal, dat Babbage aan zijn plannen besteedde, wordt op 250 000 pond becijferd (p. 32). In werkelijkheid is het „maar" 23 000 pond geweest — grote getallen trekken graag nog wat extra nullen aan. Kleine getallen hebben het omgekeerde te duchten: de geheugencapaciteit van Mark I

wordt met een factor twee te laag aangegeven (p. 33). Onopzettelijk wordt de indruk gewekt alsof er op 't ogenblik niet meer dan 3—4 grote rekenmachines bestaan; volgens mijn schattingen bedraagt het aantal ongeveer twintig. Het selectron van Rajchman is onjuist beschreven (p. 46). Een van de motiveringen, waarom het tweetallig stelsel boven het tientallige de voorkeur verdient, is onjuist (p. 36): om een getal < 1000 machinaal te laten schrijven, heeft men in het tientallig stelsel 30 organen nodig, in het tweetallige 10 — aldus de auteur. Die juiste getallen zouden zijn 30 en 20, of 27 en 10; maar de redenering als zodanig is foutief: in het ene geval zijn het tien organen met twee toestanden, in het andere drie met tien toestanden; voorziet men deze getallen van redelijke gewichten, dan is — wat dìt punt aangaat — het tweetallig stelsel zeker niet boven het tientallige te verkiezen.

Auteur gaat zeer uitvoerig in op de anatomie en physiologie van het zenuwstelsel. Naar men weet, zijn de neuronen evenals de relais en electronenbuizen in de grote rekenmachines slechts voor twee toestanden vatbaar: geëxciteerd en niet geëxciteerd. In de zogenaamde synapses vindt de prikkeloverdracht tussen de neuronen plaats. Twee neuronen leiden prikkels er naar toe; een derde leidt de uitgaande prikkel. De toestand van de uitgang is een functie van de vier mogelijke toestanden van de ingang. Alle 16 functies, die hier theoretisch mogelijk zijn, schijnen ook in werkelijkheid voor te komen. Er zijn veel meer analogieën tussen rekenmachine en zenuwstelsel. Ik weet helaas weinig af van neurologie, en ik ben er zelfs nooit achter kunnen komen, waar in de min of meer populaire relazen hieromtrent de grens loopt tussen „Dichtung und Wahrheit". Wat Couffignal in dit — buitengewoon interessante — hoofdstuk mededeelt, wijkt weer zeer sterk af van wat ik bij anderen hierover heb gelezen. Ik geloof trouwens niet in de algemeen aanvaarde *atomistische* beschrijving van de hersenfunctie, die ik boven weergaf; ik heb het gevoel, dat de statistiek een veel grotere rol speelt en dat het denken veeleer een *massa*-verschijnsel in de wereld der neuronen is.

Het wat suggesties aangaat, waardevolste, maar naar de formele kant het minst geslaagde hoofdstuk lijkt mij dat over logica en logistiek. De uitdrukkingswijze is weinig exact; men is aangewezen op gissingen. Ik heb er veel moeite aan besteed; desondanks heb ik de bedoelingen maar ten dele kunnen begrijpen. De laatdunkende opmerkingen over axiomatiek en logistiek, die telkens herhaald worden, zijn dan ook weinig op hun plaats. Uit de mathematische behandeling der logica kan men in elk geval leren, hoe men zijn

gedachten exact formuleert. Aan de terminologie kan men zien, dat de auteur de mathematische logica niet kent. Hij is in zeer simplistische opvattingen blijven steken, die soms komiek aandoen: b.v. op p. 133—134 (en elders) een sterk verhaal over de geschiedenis der philosophie (speciaal over Descartes, Pascal en Kant), dat opdringerig riekt naar Franse lyceumlessen wijsbegeerte; of — een ander voorbeeld — de bewering, dat de existentie van logische vergelijkingen met niet ondubbelzinnig bepaalde oplossing „est souvent invoquée pour justifier les logiques du genre brouwerien".

De auteur schijnt propositie- en relatie-logica, quantificatoren, enz. als metaphysisch te verwerpen. Hij beperkt zich tot een soort praedicatenlogica, die in formeel opzicht wel enigszins origineel is. Gegeven is een vast systeem van n onafhankelijke preadicaten. Hieruit vormt hij „combinaisons logiques", d.w.z. (in de gebruikelijke spreekwijze) klassen van praedicaten. Zulk een klasse wordt door een opeenvolging van n cijfers aangeduid — 0 voor een afwezig, 1 voor een aanwezig praedicaat. Deze „combinaisons logiques" worden lexicografisch genummerd. Daarna worden „fonctions logiques" ingevoerd, d.w.z. klassen van „combinaisons logiques". Zulk een klasse wordt door een opeenvolging van 2^n cijfers aangeduid, waarbij nu van de lexicografische nummering gebruik wordt gemaakt. Tenslotte worden zeer speciale klassen van „fonctions logiques" ingevoerd, die de naam „opérations logiques" krijgen. Hiermee schijnt het volgens auteur afgelopen te zijn. Extra verwarring ontstaat doordat het (vaste) praedicatengebied niet vastligt, maar de n tussendoor gevarieerd wordt. De begrippen worden in verband gebracht met schakelingsschema's op een wijze, die mij veel ingewikkelder lijkt dan de gebruikelijke. Bijgevolg is de tekst p. 120, 4° in strijd met het schakelschema fig. 25, en zowel tekst als figuur zijn in strijd met de gebruikelijke logica. Ik weet eerlijk niet wat hier bedoeld is geweest.

Maar totaal de kluts ben ik kwijt geraakt op p. 136—137. Na vrij triviale logische formules te hebben afgeleid, constateert auteur „cette inquiétante vérité": „si l'on adjoint à un système de propositions une de ses conséquences, on peut déduire de ce nouveau système la contradictoire de l'une quelconque de ces propositions par une suite d'opérations de la logique aristotélicienne."

Tevoren is er nimmer van proposities sprake geweeest; men zou dus kunnen vermoeden, dat b.v. „logische functies" bedoeld zijn. Maar dan is de veronderstelling omtrent het „toevoegen" overbodig. Bovendien blijkt uit de hierop aansluitende philosophische beschouwingen, dat de auteur wel degelijk proposities op het oog had. Ik

vermoed, dat hij in de verte iets heeft horen vertellen over de beroemde stelling van Gödel. Het voorafgaande bewijs heeft namelijk veel weg van een poging om een paradoxie in de geest van de liegende Cretenser te construeren. Maar misschien is heel iets anders bedoeld. In elk geval: wat daar staat, is volslagen onbegrijpelijk.

Uit deze overvloedige critiek zal men de conclusie trekken, dat ik het boek niet bepaald aanbeveel. Integendeel! Het is een buitengewoon stimulerend boek; ik had anders niet zoveel werk van de bespreking gemaakt. Maar de lezer moet ook meteen weten, dat het niet zijn schuld is, wanneer hij niet elke alinea ervan begrijpt.

Hans Freudenthal.

MEDEDELING

Door huisvestingsmoeilijkheden is het adres van de redacteur dr H. Streefkerk voorlopig:

Chr. H.B.S., Apeldoorn; Telef. K 6760 - 2581